

### Grundlagenfragen, Philosophie, Logik.

**Parry:** Zum Lewisschen Aussagenkalkül. *Erg. math. Kolloqu. H. 4*, 15—16 (1933).

This paper concerns the propositional algebra proposed by C. I. Lewis (see his *Survey of Symbolic Logic*, Univ. Calif. press 1918, Chapter V). This algebra is characterized by the presence of a symbol expressing „impossibility“. The present author gives a method of determining the deducibility from Lewis's postulates of any formula, expressible in that symbolism, and such that no symbol of impossibility operates on the whole of a constituent expression containing another such symbol. If a postulate due to Becker be adopted also, then this solves completely the Entscheidungsproblem for the resulting algebra.

*Curry* (State College).

**Gödel:** Über Unabhängigkeitsbeweise im Aussagenkalkül. *Erg. math. Kolloqu. H. 4*, 9—10 (1933).

The author gives four propositions  $A, B, C, D$  from the algebra of propositions, such that the independence of  $D$  from  $A, B, C$  can be established by means of an infinite model (logical matrix), but not by means of a finite one.

*H. B. Curry.*

**Gödel, Kurt:** Eine Interpretation des intuitionistischen Aussagenkalküls. *Erg. math. Kolloqu. H. 4*, 39—40 (1933).

The author exhibits a system  $\mathcal{S}$  together with a scheme for defining in  $\mathcal{S}$  the primitive ideas the Heyting algebra of propositions, such that a necessary condition that a formula be deducible in the latter algebra is that its translation be deducible in  $\mathcal{S}$ . This condition, the author states, is also probably sufficient; in particular the translation of the law of excluded middle is not proveable in  $\mathcal{S}$ . The system consists of ordinary propositional algebra together with three postulates and a rule concerning a symbol  $B$ , where  $Bp$  means „ $p$  ist beweisbar“; the resulting algebra is equivalent to the system obtained by adding a postulate of Beckers to the Lewis system of strict implication.

*Curry* (State College).

**Gödel:** Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie. *Erg. math. Kolloqu. H. 4*, 34—38 (1933).

Let  $A$  represent the classical algebra of propositions;  $B$  the intuitionistic algebra as given by Heyting (*S.-B. preuß. Akad. Wiss.* 1930, 42—56). Let  $C$  be the set of postulates for arithmetic proposed by Herbrand (*J. reine angew. Math.* 166; this *Zbl.* 3, 49). Let  $A^*$  be the system obtained by adjoining  $C$  to the classical logical calculus (i. e.  $A$  plus the theory of apparent variables); similarly let  $B^*$  be obtained by adjoining  $C$  to the Heyting logic (e. c., pp. 42—71). Then it is of course true, when we identify the corresponding primitive constants of  $A$  and  $B$  (or  $A^*$  and  $B^*$ ), that every true formula of  $B$  (or  $B^*$ ) becomes a true formula of  $A$  (or  $A^*$ ). The author shows, conversely, that it is possible to interpret the primitive entries of  $A$  (or  $A^*$ ) in terms of those of  $B$  (or  $B^*$ ) in such a way that every true formula of the former becomes, when interpreted, also true in the latter. Since  $A^*$  and  $B^*$  are typical formulations of arithmetic from the classical and intuitionistic points of view respectively, it follows that the intuitionistic arithmetic is not, formally considered, more restricted than the classical; and if the intuitionistic arithmetic is consistent, so also is the classical. *Curry.*

**Skolem, Th.:** Über die Unmöglichkeit einer vollständigen Charakterisierung der Zahlenreihe mittels eines endlichen Axiomensystems. *Norsk Mat. Forenings Skr.*, II. s. Nr 1/12, 73—82 (1933).

Man betrachte diejenigen Ausdrücke, die sich aufbauen aus: 1. Variablen  $x, y, \dots$ , deren Wertbereich die natürlichen Zahlen sind, 2.  $+$  (Addition) und  $\cdot$  (Multiplikation),



3.  $>$  und  $=$ , 4. den Operationen des Aussagenkalküls, 5. den Quantifikatoren, bezogen auf Zahlvariable. (Kompliziertere Funktionen, wie z. B.  $x^x$ ,  $x!$ , lassen sich durch  $+$ ,  $\cdot$  und die angeführten logischen Begriffe definieren.) Verf. beweist, daß es ein System  $N^*$  von Dingen mit zwei darin definierten Operationen  $+$ ,  $\cdot$  und mit zwei Relationen  $>$ ,  $=$  gibt, welches mit dem System  $N$  der natürlichen Zahlen nicht isomorph ist, für welches aber trotzdem alle mittels der eingangs erwähnten Symbole ausdrückbaren Sätze gelten, die für das System  $N$  gelten. Daraus folgt, daß es kein, nur die eingangs erwähnten Begriffe verwendendes (und daher überhaupt kein, bloß zahlentheoretische Begriffe verwendendes) Axiomensystem gibt, welches die Struktur der Zahlenreihe eindeutig festlegt, ein Resultat, das sich auch unschwer aus den Untersuchungen des Ref. in *Mh. Math. Phys.* 38, 174 (vgl. dies. Zbl. 2, 1) ergibt. Das vom Verf. konstruierte System  $N^*$  besteht aus den mittels der eingangs erwähnten Begriffe definierbaren Funktionen  $f_i(x)$ , zwischen denen eine  $>$ -Relation dadurch festgelegt wird, daß zunächst eine Funktion  $g(x)$  bestimmt wird, derart daß für jedes Paar  $f_i, f_k$  entweder  $f_i[g(x)] > f_k[g(x)]$  oder  $f_i[g(x)] = f_k[g(x)]$  oder  $f_i[g(x)] < f_k[g(x)]$  für fast alle  $x$  gilt. Die Operationen  $+$ ,  $\cdot$  für die  $f_i$  werden in der gewöhnlichen Weise definiert. Mit Hilfe anderer als der eingangs erwähnten Begriffe kann man natürlich Sätze bilden, die für  $N^*$ , aber nicht für  $N$  gelten, wofür einige Beispiele angeführt werden. *K. Gödel.*

**Curry, H. B.: Apparent variables from the standpoint of combinatory logic.** *Ann. of Math.*, II. s. 34, 381—404 (1933).

In Revision seines bisherigen Standpunktes führt der Verf. in die von ihm entwickelte kombinatorische Logik (*Amer. J. Math.* 52, dies. Zbl. 1, 261, auch 4, 387) Variable ein, und zwar werden die beiden den Russell-Whiteheadschen Symbolen  $\hat{x}$ ,  $(x)$  entsprechenden Variablentypen  $-[x]$ ,  $(x)$  — definiert. Die wichtigsten Regeln ihrer Anwendung werden formal hergeleitet, insbesondere das vom Verf. in *Ann. of Math.* 32 (dies. Zbl. 1, 261) unformal bewiesene Substitutionsprinzip (dessen sonst übliche Formulierung nicht den Curryschen Anforderungen an Strenge genügt) und die den Zusammenhang zwischen der Operation  $(x)$  und der Implikation betreffenden Regeln. Bei der Herleitung der letzteren werden außer den Definitionen der Operationen  $[x]$ ,  $(x)$  auch 2 Axiome mit Variablen  $(x)$  herangezogen. *Arnold Schmidt.*

**Whitney, Hassler: Characteristic functions and the algebra of logic.** *Ann. of Math.*, II. s. 34, 405—414 (1933).

Einige grundlegende Beziehungen aus der Algebra der Logik werden in der Sprache der „charakteristischen Funktionen“  $[A(x) = 1, \text{ wenn } x \in \mathfrak{A}, \text{ sonst } A(x) = 0]$  entwickelt.

*Arnold Schmidt* (Göttingen).

**Pannekoeck, A.: Das Wesen des Naturgesetzes.** *Erkenntnis* 3, 389—400 (1933).

Der Verf. untersucht die Bedeutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes für die Theorie der Naturgesetzlichkeit; er setzt sich dabei insbesondere mit der Auffassung von H. Reichenbach auseinander, daß im Rahmen der gegenwärtigen Physik sämtliche Naturgesetze als Wahrscheinlichkeitsgesetze anzusehen seien. — Pannekoeck geht von dem Hinweis aus, daß Naturgesetze wie das Newtonsche Gravitationsgesetz eine bestimmte physikalische Größe als eindeutige Funktion gewisser anderer physikalischer Größen darstellen; er spricht im Hinblick auf diese formale Eigentümlichkeit von der „unbedingten Gültigkeit“ des Gesetzes und sieht sich so vor die Frage gestellt, wie man an Hand empirischer Daten mit ihrer unvermeidlichen Unschärfe zu solchen streng gültigen Gesetzen gelangen könne. Er erblickt die Lösung in dem Gedanken, die Naturgesetze bezögen sich nicht auf reale empirische Gegebenheiten, sondern auf die abstrakten Begriffe, „die unsere Verstandestätigkeit als deren geistige Zusammenfassung gebildet hat“, die nur geistige Existenz besitzen und denen kein reales Objekt entspricht. — Aus diesem Grundgedanken ergibt sich für den Verf., daß das Eintreten eines konkreten Ereignisses, das auf Grund gewisser Naturgesetze vorausberechnet wurde, keineswegs sicher sei; im konkreten Einzelfalle seien stets noch Umstände realisiert, von denen bei der Bildung der abstrakten Begriffe in den zugrunde gelegten Naturgesetzen abgesehen worden sei. Freilich seien diese unberücksichtigten Faktoren ebenfalls gewissen Naturgesetzen unterworfen, und je mehr derartige Gesetze man berücksichtige, desto genauere Voraussagen werden man machen können: „Wir haben also mit einer konvergenten Reihe zu tun, in der jedes Glied ein nach einem bestimmten Gesetz wirkender Einfluß ist.“ Diese Annahme (die Reichenbach angesichts der Ergebnisse der neueren Physik als nicht mehr haltbar bezeichnet hat) wird nicht



näher begründet. — Die Bedeutung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes für die Theorie der Naturgesetzlichkeit erblickt der Verf. nun lediglich in dem Umstande, daß man sich bei der Summation einer solchen Reihe stets mit endlich vielen Summanden begnügen müsse, und daß außerdem die empirischen Daten für die Anwendung des Gesetzes nicht exakt gegeben seien: Auf die so entstehenden Abweichungen könne man nun Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen im Sinne der Fehlertheorie anwenden. — Von dieser methodischen Funktion des Wahrscheinlichkeitsbegriffes wohl zu unterscheiden sei sein Auftreten in statistischen Gesetzen; dem Verf. zufolge beziehen sich derartige Gesetze auf abstrakte Begriffe in demselben Sinne wie die eindeutig-deterministischen Naturgesetze; angesichts dieser inneren Verwandtschaft erscheint ihm der oft erörterte Gegensatz zwischen kausaler und statistischer Naturgesetzlichkeit als eine untergeordnete Differenz.  
C. G. Hempel (Berlin-Buch).

● **Hahn, Hans: Logik, Mathematik und Naturerkennen. (Einheitswiss. Hrsg. v. Otto Neurath, Rudolf Carnap u. Hans Hahn. H. 2.)** Wien: Gerold & Co. 1933. 33 S. RM. 1.50.

**Reichenbach, Hans: Kant und die Naturwissenschaft. Naturwiss. 21, 601—606 u. 624—626 (1933).**

**Hönigswald, Richard: Kausalität und Physik. Eine methodologische Überlegung. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. 16/17, 568—578 (1933).**

Die Begriffe „Bestimmtheit“, „Bestimmbarkeit“ u. a. werden, ohne auf physikalische Ergebnisse einzugehen, „methodologisch“ erörtert. Die Kausalität sei eine apriorische Kategorie im Sinne Kants.  
E. Zilsel (Wien).

## Algebra und Zahlentheorie.

● **Hurwitz, Adolf: Mathematische Werke. Bd. 2. Zahlentheorie, Algebra und Geometrie. Basel: Birkhäuser 1933. XIV, 755 S. u. 11 Fig.**

**Bays, S., et G. Belhôte: Sur les systèmes cycliques de triples de Steiner différents pour  $N$  premier de la forme  $6n + 1$ . Comment. math. helv. 6, 28—46 (1933).**

Continuing earlier investigations the authors treat the different cyclic systems of triples for each divisor  $d$  of  $3n$  and apply their results to the cases when  $6n + 1$  is 61 and 73.  
R. D. Carmichael (Urbana).

**Haussner, Robert: Über eine besondere Abelsche Gleichung. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 43, 47—53 (1933).**

Verf. zeigt in Verallgemeinerung einer Aufgabe von Tschakaloff [Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 41, 33 (1932)], daß die Gleichung  $(x + 1)^n + (-x)^n + (-1)^n = 0$  für alle Werte von  $n = 6m - 6 + 2\varepsilon$  und  $n = 6m - 3 + 2\varepsilon$ ,  $\varepsilon = 0, 1, 2$ ,  $m \leq 5$ , d. h. also für alle Werte von  $n < 30$  und  $n = 31$ , algebraisch auflösbar ist, indem er durch Substitution die Auflösung der Gleichung zurückführt auf die Auflösung einer Gleichung vom Grade  $(m - 1)$  und von  $(m - 1)$  reziproken Gleichungen vom Grade 6.  
Wegner (Darmstadt).

● **MacDuffee, C. C.: The theory of matrices. (Erg. d. Math. u. ihrer Grenzgeb. Hrsg. v. d. Schriftleitung d. Zbl. f. Math. Bd. 2, H. 5.)** Berlin: Julius Springer 1933. V, 110 S. RM. 13.—.

Eine enzyklopädische Zusammenstellung aller bisher erschienenen Untersuchungen über Matrizes. Das Wort Matrix wird für quadratische Matrizes oder Elemente der vollständigen Matrixalgebra über einem Ring  $\mathfrak{R}$  reserviert: die „rechteckigen Matrizes“ heißen hier „arrays“. Die Untersuchung konzentriert sich hauptsächlich um 4 Fragen: Wann sind zwei Matrizes  $A, B$  assoziiert, d. h.  $A = BU$ , wo  $U$  eine unimodulare Matrix, d. h. eine Einheit der Matrixalgebra ist? Wann sind  $A$  und  $B$  equivalent, d. h.  $A = PBQ$  mit unimodularen  $P$  und  $Q$ ? Wann sind sie kongruent, d. h.  $A = P^T B P$  ( $P$  unimodular,  $P^T$  die gespiegelte Matrix)? Wann sind sie ähnlich, d. h.  $A = P^{-1} B P$ ? Ähnliche Fragen für Matrixpaare, für symmetrische und Hermitesche Matrizes und für unitäre Ähnlichkeit. Außerdem werden behandelt: die charakteristische Gleichung und ihre Wurzeln, die Komposition der Matrizes, Matrix-



gleichungen, Funktionen von Matrizen und schließlich (ganz kurz) unendliche Matrizen. Bei allen wichtigen Sätzen werden die einfachsten bekannten Beweise angegeben.

van der Waerden (Leipzig).

**Roth, William E.:** On the equation  $P(A, X) = 0$  in matrices. Trans. Amer. Math. Soc. 35, 689—708 (1933).

The equation  $P(A, X) \equiv \sum_{k=0}^p F_k(A) X^{p-k} = 0$  is considered where  $A$  is a known square matrix with complex elements,  $F_k(\lambda)$  are polynomials or power series in the scalar  $\lambda$ , and  $X$  is a matrix to be found. Solutions are considered which are (a) unilateral on the right or left of the  $F_k(A)$ , (b) bilateral, (c) commutative with  $A$ . Inequalities depending upon the elementary divisors of  $P(A, \mu)$  and  $A - \lambda I$  are found limiting the degree and number of elementary divisors of  $X - \mu I$ . If  $B = (b_{ij})$  is an  $\alpha \times \beta$  matrix, the transverse  $B'$  of  $B$  is defined to be  $(b_{\beta-j+1, \alpha-i+1})$ . If  $B = (B_{ij})$  where the  $B_{ij}$  are blocks of elements, then  $B^* = (B'_{ji})$  is a compound transverse of  $B$ . The transverse has certain properties in common with the transpose. Relations between the right and left solutions of the given equation, and between these and the bilateral solutions, are expressed in terms of the compound transverse. *MacDuffee*.

**Turnbull, H. W.:** Diagonal matrices. Proc. Cambridge Philos. Soc. 29, 347—372 (1933).

A matrix composed exclusively of zeros except possibly in one diagonal parallel to the principal diagonal is called a diagonal matrix. Methods are developed for determining the Segre characteristic of a diagonal matrix. A continuant is defined as a matrix composed of zeros except possibly in the principal and two adjacent diagonals. Necessary and sufficient conditions are found in order that the product of two continuants shall be a continuant. Finally, necessary and sufficient conditions are obtained for the existence of a complex solution of the matrix equation  $X^r = A$  when  $A$  is singular.

*MacDuffee* (Columbus).

**Manning, W. A.:** The degree and class of multiply transitive groups. III. Trans. Amer. Math. Soc. 35, 585—599 (1933).

Eine Substitutionsgruppe wird von der Klasse  $u$  genannt, wenn alle vom Einheits-element verschiedenen Substitutionen der Gruppe mindestens  $u$  Elemente vertauschen und auch wirklich Substitutionen vom Grad  $u$  auftreten. Es handelt sich um den Zusammenhang von Grad und Klasse bei mehrfach transitiven Gruppen. Von Bocher (Math. Ann. 40) stammt der Satz, daß jede mehr als dreifach transitive Gruppe der Klasse  $u$  ( $> 3$ ), welche die alternierende Gruppe ihres Grades nicht enthält, einen Grad  $n \leq 2u + 1$  besitzt. Verf. beweist, daß eine  $t$ -fach transitive nicht alternierende Gruppe ( $t > 23$ ) der Klasse  $u$  ( $> 3$ ) einen Grad  $n < 6u/5 + u - t/t$  besitzt. Für  $t > 4$  ergibt sich ferner  $n \leq 2u$ ; für  $t > 5$ :  $n \leq 5u/3$ ; für  $t > 7$ :  $n < 3u/2$ ; für  $t > 11$ :  $n < 4u/3$ ; für  $t > 21$ :  $n < 5u/4 - t$ . Haben alle Substitutionen vom Grad  $\leq u + e$  ungerade Ordnung und ist  $t > 6$ ,  $u > 3$ , so gilt  $n < 2u - 4e - 5t + 37$ . *Taussky*.

**Möglich, Friedrich:** Über die Vollständigkeit der Gruppencharaktere. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. 18/20, 639—641 (1933).

Es handelt sich um den Satz, daß die Gruppencharaktere ein vollständiges System im Bereich der Klassenfunktionen bilden.  $E^j(R) = \|e_{\lambda\lambda}^j(R)\|$  seien die irreduziblen unitären Darstellungen der Gruppe. Soll die Funktion  $y(R) = \sum_{j, \lambda} b_{\lambda\lambda}^j e_{\lambda\lambda}^j(R)$  eine Klassenfunktion sein, so folgen aus der Vollständigkeit der  $E^j$  die Beziehungen:  $E^j(A) \cdot \|b_{\lambda\lambda}^j\| = \|b_{\lambda\lambda}^j\| \cdot E^j(A)$ . Da die  $E^j$  irreduzible Darstellungen sind, müssen die  $\|b_{\lambda\lambda}^j\|$  nach einem fundamentalen Satz der Darstellungstheorie notwendig Multipla der Einheitsmatrix  $\beta_j \delta_{\lambda\lambda}$  sein. Es ist also  $y(R) = \sum_j \beta_j \sum_{\lambda} e_{\lambda\lambda}^j(R)$  und daraus ergibt sich leicht die Vollständigkeit der Gruppencharaktere. *Taussky* (Wien).

**Sugeno, Torao:** Beweis eines Satzes über Charakter. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 15, 233—234 (1933).

Ein Beweis des Satzes, daß es für die Gruppe der primen Restklassen nach einer natürlichen Zahl einen vom Hauptcharakter verschiedenen Charakter gibt. *Taussky*.



**Shoda, Kenjiro:** Über die monomialen Darstellungen einer endlichen Gruppe. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 15, 249—257 (1933).

Die transitiven monomialen Darstellungen einer endlichen Gruppe werden durch leicht angebbare Darstellungsmoduln (Ideale des Gruppenrings) vermittelt. Aus dieser Erzeugung werden die Eigenschaften dieser Darstellungen hergeleitet. Es wird angegeben, wann zwei monomiale Darstellungen monomial-äquivalent sind und wann sie überhaupt äquivalent sind; ferner, wann eine monomiale Darstellung irreduzibel ist. Als Anwendung werden die irreduziblen Darstellungen einer beliebigen metabelschen Gruppe  $\mathfrak{G}$  konstruiert: Diese sind alle monomial und werden durch die linearen Darstellungen eines beliebigen, die Kommutatorgruppe umfassenden maximalen abelschen Normalteilers von  $\mathfrak{G}$  induziert.

van der Waerden (Leipzig).

**Noether, Emmy:** Nichtkommutative Algebra. Math. Z. 37, 514—541 (1933).

Ziel der Arbeit ist eine einheitliche Begründung derjenigen Sätze über einfache Algebren, welche der kommutativen Theorie der endlichen Körpererweiterungen entsprechen. Der Ausgangspunkt ist die Beziehung zwischen Darstellungen und Darstellungsmoduln, und zwar werden neben direkten (isomorphen) Darstellungen auch reziproke (invers-isomorphe) Darstellungen eines Ringes  $\mathfrak{R}$  durch Matrizen in  $\mathfrak{S}$  betrachtet. Die zugehörigen reziproken Darstellungsmoduln haben  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{S}$  als Links-multiplikatorenbereiche. Sie können auch als  $(\mathfrak{R} \times \mathfrak{S})$ -Linksmoduln aufgefaßt und zu den Idealen von  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$  in Beziehung gesetzt werden. Mit Hilfe eines Satzes über invariante Moduln in bezug auf gewisse Automorphismen wird gezeigt:  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$  ist einfach, wenn  $\mathfrak{R}$  und  $\mathfrak{S}$  beide einfach sind und  $\mathfrak{S}$  normal über den Grundkörper  $P$  ist. In diesem Fall gibt es bekanntlich nur eine Klasse von irreduziblen Linksidealen in  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$  und daher auch nur eine Klasse von irreduziblen reziproken Darstellungen von  $\mathfrak{R}$  in  $\mathfrak{S}$  oder von  $\mathfrak{S}$  in  $\mathfrak{R}$ . Kennt man eine reziproke Darstellung von  $\mathfrak{S}$  in  $\mathfrak{R}$ , so kann man sowohl die Struktur von  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$  als auch alle reziproken Darstellungen von  $\mathfrak{R}$  in  $\mathfrak{S}$  angeben. — Aus diesem Prinzip folgen die folgenden Sätze: Jeder Isomorphismus zweier einfachen, das Zentrum umfassenden Unterringe einer einfachen Algebra  $\mathfrak{R}$  wird von einem inneren Automorphismus von  $\mathfrak{R}$  bewirkt. Ist  $\mathfrak{S}$  ein solcher Unterring und  $\bar{\mathfrak{S}}$  die Gesamtheit der mit  $\mathfrak{S}$  elementweise vertauschbaren Elemente von  $\mathfrak{R}$ , so ist  $\bar{\mathfrak{S}}$  auch einfach und  $\mathfrak{S}$  die Gesamtheit der mit  $\bar{\mathfrak{S}}$  vertauschbaren Elemente. Alle Systeme  $\mathfrak{R}$ ,  $\mathfrak{S}$ ,  $\mathfrak{R} \times \mathfrak{S}$ ,  $\bar{\mathfrak{S}}$ ,  $\mathfrak{R} \times \bar{\mathfrak{S}}$  sind volle Matrizenringe über gewisse Divisionsalgebren, wobei die Divisionsalgebra von  $\mathfrak{S}$  zu der von  $\mathfrak{R} \times \bar{\mathfrak{S}}$  reziprok-isomorph ist und das Produkt der Rangzahlen von  $\mathfrak{S}$  und  $\bar{\mathfrak{S}}$  gleich dem Rang von  $\mathfrak{R}$  ist.  $\mathfrak{S}$  ist dann u. n. d. Körper, wenn  $\bar{\mathfrak{S}}$  ein irreduzibles Matrixsystem im Matrizenring  $\mathfrak{R}$  ist. Bei allen diesen Sätzen wird untersucht, inwieweit sie für Schiefkörper unendlichen Ranges gültig bleiben. — Spezialisiert man  $\mathfrak{S}$  zu einem kommutativen Körper  $Z$ , so erhält man die Theorie der Zerfällungskörper, mit dem Hauptsatz:  $Z$  ist d. u. n. d. Zerfällungskörper der Divisionalgebra  $A$  mit dem Zentrum  $P$ , wenn die einzige irreduzible Darstellung von  $Z$  in  $A$  einen maximalen kommutativen Unterkörper des Matrizenrings  $A$  ergibt. Es gibt separable Zerfällungskörper, sogar solche, welche in  $A$  einbettbar sind. — Parallel mit der nicht-kommutativen wird auch die kommutative Galoissche Theorie entwickelt. Durch Kombination der beiden erhält man die Hauptsätze über Abspaltungs- und Zerfällungskörper beliebiger Algebren, die man auch als Sätze über die Zerfällung irreduzibler Darstellungen bei kommutativer Erweiterung des Grundkörpers aussprechen kann.

van der Waerden (Leipzig).

**Hasse, Helmut:** Théorie des restes normiques dans les extensions galoisiennes. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 469—471 (1933).

Vorläufige Mitteilung von Untersuchungen über folgenden Gegenstand: Sei  $K$  ein Galoisscher Oberkörper über dem algebraischen Zahlkörper  $k$  und  $\mathfrak{p}$  ein Primideal von  $k$ . Man betrachte die Gruppe der Normenreste von  $K/k$  modulo der Potenz  $\mathfrak{p}^u$ . Wie ändert sich der Index dieser Gruppe innerhalb der multiplikativen Gruppe aller



Reste bei wachsendem  $u \geq 1$ ? Zur Beantwortung dieser Frage greife man aus der Galoisgruppe von  $K/k$  die verschiedenen Verzweigungsgruppen  $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_r = 1$  eines festen  $K$ -Primteilers  $\mathfrak{P}$  von  $\mathfrak{p}$  heraus und fasse dabei die Trägheitsgruppe als 0-te Verzweigungsgruppe  $\mathfrak{B}_0$  auf. Unter  $n_e$  verstehe man die Ordnung von  $\mathfrak{B}_e$ , unter  $v_{e+1}$  die  $(e+1)$ -te Verzweigungszahl von  $\mathfrak{P}$ , d. h. den größten Exponenten der Art, daß für jede Substitution  $V_e$  aus  $\mathfrak{B}_e$  und jede ganze Zahl  $\Gamma$  aus  $K$  die additive Kongruenz  $\Gamma^{V_e} \equiv \Gamma \pmod{\mathfrak{P}^{v_{e+1}+1}}$  besteht. Setzt man dann  $u_0 = -1$ ,  $u_{r+1} = \infty$  und

$$u_e = u_0 + \frac{n_0}{n_0} (v_1 - v_0) + \dots + \frac{n_{e-1}}{n_0} (v_e - v_{e-1}),$$

wo  $v_0 = -1$  ist, so sind die  $u_e$  im allgemeinen gebrochene rationale Zahlen, und es gilt: Der Index der Gruppe der Normenreste  $\pmod{\mathfrak{p}^u}$  wächst höchstens dann, wenn  $u$  gleich einer der Zahlen  $u_e$  wird (vorausgesetzt natürlich, daß das betreffende  $u_e$  ganz ist), und zwar multipliziert er sich beim Durchgang durch  $u_e$  mit einem Faktor  $\leq \frac{n_{e-1}}{n_0}$ .

Er besitzt die Ordnung der Zerlegungsgruppe von  $\mathfrak{P}$  zur oberen Schranke und nimmt seinen größten Wert spätestens für  $u = u_r$  an. F. K. Schmidt (Erlangen).

**Rado, Richard:** Verallgemeinerung eines Satzes von van der Waerden mit Anwendungen auf ein Problem der Zahlentheorie. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. 16/17, 589 bis 596 (1933).

Der bekannte kombinatorische Satz von van der Waerden läßt sich folgendermaßen geometrisch formulieren: „ $k$  und  $l$  seien zwei feste natürliche Zahlen. Gegeben sind  $N$  äquidistante Punkte auf einer Geraden (d. h. ein beschränkter Teil eines eindimensionalen Punktgitters). Verteilt man diese Punkte auf  $k$  Klassen, dann gibt es, wenn  $N$  groß genug ist, stets in mindestens einer Klasse  $l$  äquidistante Punkte (also wieder einen Teil eines eindimensionalen Punktgitters)“. Verf. zeigt, daß ein ganz entsprechender Satz auch für Punktgitter in Räumen von mehr als einer Dimension gilt: Zerschlägt man ein solches Gitter in endlich viele Stücke, dann gibt es immer in mindestens einem dieser Stücke einen Teil eines Gitters derselben Art, wobei dieser Teil in jeder der Grundrichtungen des ursprünglichen Gitters eine beliebig vorschreibbare Anzahl von äquidistanten Punkten enthält. Als Anwendung verallgemeinert Verf. Sätze von A. Brauer über Sequenzen unter den  $k$ -ten Potenzresten nach einem Primzahlmodul auf zusammengesetzte Moduln, wobei außer der Untergruppe der  $k$ -ten Potenzreste (innerhalb der multiplikativen Gruppe der zu einem Modul  $m$  teilerfremden Restklassen nach  $m$ ) auch andere Untergruppen von zahlentheoretischem Interesse vorkommen. Bessel-Hagen (Bonn).

**Young, Alfred:** Binary forms with a vanishing covariant of weight four or five. J. London Math. Soc. 8, 182–187 (1933).

Wenn eine binäre Form  $f$  vom Grad  $n$  der Bedingung

$$A f^2(f, f)^4 + B H^2 = 0$$

genügt, wo  $A$  und  $B$  Konstante sind und  $H$  die Hessesche  $(f, f)^2$  ist, so ist entweder  $f$  eine exakte  $n$ -te Potenz oder  $A$  und  $B$  genügen für irgendein  $r$  der Bedingung

$$3A n^2(r-1)(n-r-1) + B(n-2)(n-3)r(n-r) = 0,$$

und es ist entweder  $f = l_1^r l_2^{n-r}$  oder  $f = \psi^r$  mit  $(\psi, \psi)^4 = 0$ . In derselben Weise wird die Bedeutung des Verschwindens einer Kovariante vom Gewicht  $s$

$$(A f^2(f, f)^4 + B H^2, f)$$

diskutiert.

van der Waerden (Leipzig).

**Young, Alfred:** Note on transvectants. J. London Math. Soc. 8, 187–188 (1933).

Es wird eine bequeme Formel für die Berechnung einer Überschiebung von zwei binären Formenprodukten angegeben. Ein typischer Spezialfall der Formel lautet

$$r! \binom{m+n}{r} \binom{p}{r} \left( \frac{(ax)^m}{m!} \frac{(bx)^n}{n!}, \frac{(cx)^p}{p!} \right)^r = \sum_{\lambda+\mu=r} \frac{(ac)^\lambda}{\lambda!} \frac{(bc)^\mu}{\mu!} \frac{(ax)^{m-\lambda}}{(m-\lambda)!} \frac{(bx)^{n-\mu}}{(n-\mu)!} \frac{(cx)^{p-r}}{(p-r)!}$$

van der Waerden (Leipzig).



**Bell, E. T.: Diophantine equations from algebraic invariants and covariants.** Ann. of Math., II. s. 34, 450—460 (1933).

Expressing the condition that a quantic have a repeated factor, or have some such property, in terms of the roots or coefficients, we get a parametric representation of the locus represented by the vanishing of some invariant or covariant. In certain cases it is possible to deduce explicit formulae, involving only integral parameters, and giving exclusively all integer points on the locus. As an example, the writer develops in turn the complete integral solutions of  $xy = uv$ ;  $xy = u^2$ ; ...;  $xyz^2 = uvw^2$ ; which he applies to obtain a complete solution (in the above sense) in integers  $a, b, c, d$  of the equation  $(9ad - bc)^2 - 4(b^2 - 3ac)(c^2 - 3bd) = 0$ . It is indicated how to treat several allied equations. Reference on p. 459, line 3 from bottom, should read § 4 (5). G. Pall (Montreal).

**Bell, E. T.: Reducible diophantine systems.** Bull. Amer. Math. Soc. 39, 417 bis 423 (1933).

The algorithm of reciprocal arrays, developed by Bell in a previous paper (see this Zbl. 6, 155), is applied to obtain all sets of rational integers satisfying certain diophantine systems of the general form

$$aX_1^{a_1} \dots X_n^{a_n} = bY_1^{b_1} \dots Y_m^{b_m} = \dots = cW_1^{c_1} \dots W_s^{c_s}.$$

R. D. Carmichael (Urbana).

**Hall, Marshall: Slowly increasing arithmetic series.** J. London Math. Soc. 8, 162 bis 166 (1933).

Die Zahlen  $U_n = (a^n - b^n) : (a - b)$ , wo  $a$  und  $b$  die Wurzeln von  $x^2 - \sqrt{R} \cdot x + Q = 0$  sind, sind von D. H. Lehmer (dies. Zbl. 2, 247) untersucht worden ( $R$  und  $Q$  ganz und teilerfremd). Durch die Eigenschaft, daß die primitiven Teiler von  $U_n$  die Form  $kn \pm 1$  haben, kann man viele Zahlen  $U_n$  in Primfaktoren zerlegen. Der Verf. hat sich nun die Frage vorgelegt, eine Lehmersche Reihe zu finden, die möglichst langsam fortschreitet. Diese Reihe ist bestimmt durch  $R = 5$ ,  $Q = 2$ . Man kann auch Zahlenreihen  $U_n = N(a^n - b^n)$  untersuchen, worin  $a$  und  $b$  Zahlen eines beliebigen Zahlkörpers bedeuten; die Primteiler dieser  $U_n$  haben auch die obengenannte Eigenschaft. Die möglichst langsam fortschreitende Reihe in kubischen Zahlkörpern ist  $U_n = N(\alpha^n - 1)$ ,  $\alpha^3 - \alpha - 1 = 0$ . Eine Tabelle der Zerlegung der ersten 100 Glieder dieser Reihe in Primfaktoren ist zugefügt. N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

**Lehmer, D. H.: Factorization of certain cyclotomic functions.** Ann. of Math., II. s. 34, 461—479 (1933).

Eine Methode zur Auffindung großer Primzahlen besteht darin, daß man direkt oder indirekt nach einem Teiler der zu untersuchenden Zahlen sucht. Nun gibt es spezielle Zahlenreihen, deren mögliche Primteiler so beschränkt sind, daß diese Methode ohne große Rechenarbeit zum Ziel führt. Die besten Reihen dieser Art sind

vielleicht besondere Fälle der folgenden:  $A_n = \prod_{v=1}^r (\alpha_v^n - 1)$ , wo  $\alpha_v$  die Wurzeln einer irreduziblen Gleichung  $r$ -ten Grades  $f(x) = 0$  mit ganzzahligen Koeffizienten bedeuten; der Koeffizient von  $x^r$  ist 1. Diese ganzen Zahlen  $A_n$  werden untersucht. Bei der Zerlegung von  $A_n$  in Primfaktoren kommt es auf die charakteristischen Faktoren an; das sind die Faktoren, die nicht in einem  $A_d$  aufgehen, wenn  $d$  ein Teiler von  $n$  ist. Die ungeraden charakteristischen Faktoren, welche nicht in der Diskriminante von

$\varphi_n(y) = \prod_{v=1}^r (y - f(\varepsilon_v))$  aufgehen, haben die Form  $nx + 1$ ;  $\varepsilon_v$  sind die primitiven  $n$ -ten Einheitswurzeln. Weiter wird bewiesen, daß die  $A_n$  eine rekurrente Zahlenreihe bilden. Wenn man bei der Zerlegung der  $A_n$  große Primzahlen erhalten will, so ist es vorteilhaft  $f(x)$  so zu bestimmen, daß die Reihe der  $A_n$  langsam fortschreitet. Für  $r = 1, 2, 3, 4$  wird die vorteilhafteste  $f(x)$  gegeben und für  $r = 3$  wird ein Beispiel ausgearbeitet, wobei  $A_{113}$  und  $A_{127}$  als Primzahlen erkannt werden. Der Zusammen-

hang der  $A_n$  mit Funktionen von Schur, Pierce und Poulet wird untersucht, sowie der Fall eines symmetrischen  $f(x)$ . N. G. W. H. Beeger.

**Rafaël, R. P. H. de:** Trois propriétés asymptotiques des nombres saturés. Ann. Soc. Sci. Bruxelles A 53, 33—39 (1933).

Unter gesättigten Zahlen versteht der Verf. die kleinsten Zahlen mit maximaler Teilerzahl. Er untersucht Zahlen der Form  $p^m q^n$ ,  $p$  und  $q$  Primzahlen. Ist  $p^m q^n$  eine gesättigte Zahl und ist  $p^m q^n > p^{m'} q^{n'}$ , so muß  $(m+1)(n+1) > (m'+1)(n'+1)$  sein. Die erste Ungleichheit liefert:  $(m-m'):(n'-n) > \log q : \log p$ , wenn  $n' > n$  und sonst eine ähnliche. Wenn nun  $\log q : \log p$  in einen Kettenbruch entwickelt wird, sind bekanntlich die Näherungsbrüche  $\frac{m_k}{n_k}$  ungerader Ordnung kleiner und die anderen  $\frac{m'_k}{n'_k}$  größer als  $\log q : \log p$ . Setzt man daher  $m' = m + m_k$ ,  $n' = n - n_k$  für  $n' > n$  und sonst  $m' = m - m'_k$ ,  $n' = n + n'_k$ , so genügt dies der ersten Ungleichheit. Die zweite gibt zwei Schranken für  $n$ . Die Berechnungen sind ausgeführt für  $p = 2$ ,  $q = 3$  und ergeben für  $m \leq 1\,000\,000$  für  $n$  227 Werte. Zwei andere asymptotische Eigenschaften werden besprochen. N. G. W. H. Beeger (Amsterdam).

**Heegaard, Poul:** Über die Heawoodschen Kongruenzen. Norsk Mat. Forenings Skr., II. s. Nr 1/12, 47—54 (1933).

Verf. bespricht eine gewisse Anordnung der Unbekannten, die in den Heawoodschen Kongruenzen auftreten, welche eine klarere Übersicht über diese Kongruenzen ergibt. F. Bohnenblust (Princeton).

**Ostrowski, Alexander:** Mathematische Miszellen. XVIII.: Notiz über den Wertevorrat der Riemannschen  $\zeta$ -Funktion am Rande des kritischen Streifens. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 43, 58—64 (1933).

Verf. beweist über die Werteverbreitung der Riemannschen Zetafunktion in der Nähe der Graden  $\sigma = 1$  den folgenden Satz, der klassische Resultate von Bohr und Landau weiter verschärft: Zu jedem hinreichend großen  $D$  gibt es ein  $T_0(D)$  und ein  $\gamma(D)$ , so daß es für  $T \geq T_0$  im Intervall  $\langle 1, T \rangle$   $\gamma T$  Punkte  $k_1, k_2, \dots$  gibt, für die in jedem der getrennt liegenden Kreise um die Punkte  $1 + i k_\mu$  mit den Radien  $\frac{1}{D}$  jeder Wert  $w$  mit  $\frac{1}{D} \leq w \leq D$  wenigstens an  $2 \log D$  verschiedenen Stellen angenommen wird. — Zum Beweise benutzt Verf. einen einfachen Kronecker-Weylschen Satz über Gleichverteilung mod 1 sowie einen seiner eigenen Beiträge zum Picard-Schottkyschen Ideenkreise. Hans Heilbronn (Göttingen).

## Analysis.

**Del Chiaro, A.:** Osservazioni sul procedimento di arrotondamento di Schwarz. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 788—793 (1933).

In Ergänzung der in dies. Zbl. 6, 296 besprochenen Arbeit wird die Frage behandelt, wann in der dort abgeleiteten Ungleichung das Gleichheitszeichen steht. Rellick (Göttingen).

**Aumann, G.:** Eine Verallgemeinerung des Rolleschen Satzes auf komplexwertige Funktionen. Math. Z. 37, 578—581 (1933).

Einen in einer früheren Note (vgl. dies. Zbl. 3, 299) bewiesenen Satz verallgemeinert zeigt der Verf.: Ist die komplexwertige Funktion  $F(x)$  im Intervall  $a \leq x \leq b$  zweimal stetig differenzierbar und in keinem Teilintervall konstant, ist ferner  $F(a) = 0$ ,  $F(b) = 2\gamma \geq 0$  und  $\mu = \max_{a \leq x \leq b} |\Im F(x)| > 0$ , so gilt

$$\min_{a \leq x \leq b} \left| \frac{F'^2(x)}{F''(x)} \right| \leq \max \left( \mu, \frac{\gamma^2 + \mu^2}{2\mu} \right).$$

Der Beweis beruht auf einer Verallgemeinerung des im zitierten Referat genannten geometrischen Hilfssatzes. W. Fenchel (Kopenhagen).



**Gallina, Gallo: Funzioni esponenziali d'ordine superiore.** Ist. Lombardo, Rend., II. s. 66, 341–358 (1933).

Die Funktionen, deren Maclaurinsche Entwicklung jedes  $n$ -te Glied der Entwicklung von  $e^x$  mit verschiedenem Anfang enthält, werden höhere Exponentialfunktionen genannt. Sie sind bereits von Riccati (für  $n = 3$ ) und allgemein von Wronski behandelt worden. Es wird  $E_{n,k}(z) = \sum_{h=0}^{\infty} z^{nh+k}/(nh+k)!$  ( $k = 0, 1, \dots, n-1$ ) gesetzt.

$E_{n,k}(z)$  läßt sich als Linearform aus Exponentialfunktionen darstellen, wie insbesondere im Fall  $n = 2$  (Hyperbelfunktionen) bekannt. Durch Umkehrung ergeben sich Formeln, die der Eulerschen Formel aus der Lehre von den komplexen Zahlen entsprechen, ebenso lassen sich Formeln, die der von Moivre entsprechen, bilden. Die  $r$ -te Ableitung von  $E_{n,k}(z)$  ist  $E_{n,k-r}(z)$ ; hieraus folgen partikuläre Lösungen und auch die allgemeine Lösung der Differentialgleichung  $y^{(n)} = y$ . Die Wronskische Determinante von  $E_{n,0}(z), E_{n,1}(z), \dots, E_{n,n-1}(z)$  (die auch als zyklische Determinante geschrieben werden kann) ist gleich 1. Es gelten ferner Additionstheoreme:

$$E_{n,k}(u+v) = \sum_{r=0}^k E_{n,r}(u) E_{n,k-r}(v) + \sum_{k+1}^{n-1} E_{n,r}(u) E_{n,n+k-r}(v),$$

daher auch Multiplikationstheoreme, ferner Umkehrungen, die den Formeln der Prosthaphäresis entsprechen. Zwischen den  $E_{n,k}(z)$  bestehen  $n - \varphi(n)$  algebraische Relationen; eine davon ist die Aussage über die Wronskische Determinante (s. oben); wenn  $n$  eine Primzahl ist, so ist sie die einzige. Es folgen Angaben über die Werteverteilung der  $E_{n,k}$ . Sie sind für  $n > 2$  nicht periodisch. Für gerades  $n$  ist  $E_{n,k}$  mit  $k$  gerade und ungerade. Die Werte von  $E_{n,k}$  in der komplexen Ebene lassen sich bereits aus den Werten in einem Winkelfeld vom Winkel  $2\pi/n$  mit dem Scheitel im Ursprung herleiten; es genügt sogar ein halb so großes Winkelfeld; dessen einer Schenkel in die reelle Achse fällt. Es folgen noch Angaben über die Nullstellen von  $E_{n,k}$  und Produktentwicklungen dafür. Den Schluß macht ein Verzeichnis von 24 Abhandlungen über die Exponentialfunktionen höherer Ordnung.

L. Schrutka (Wien).

**Tchakaloff, L.: Sur un problème de minimum concernant une certaine classe de polynomes.** C. R. Acad. Sci., Paris 197, 572–575 (1933).

Ankündigung folgender Resultate: Es sei  $\psi(x)$  für alle reellen  $x$  wachsend, und es mögen existieren  $I_r = \int_{-\infty}^{\infty} x^r d\psi(x)$  für  $r = 0, 1, 2, \dots, k$ ;  $\psi(x)$  habe mindestens  $n = [k/2] + 1$

Wachstumsstellen. Ferner seien  $P_0 = c_0, P_1(x), P_2(x), \dots, P_n(x)$  Polynome der Eigenschaft: 1.  $P_r(x)$  hat den Grad  $r$ . 2. Der Koeffizient von  $x^r$  in  $P_r(x)$  ist eine positive,

vorgegebene Zahl  $c_r$ . 3.  $\int_{-\infty}^{\infty} P_{\mu}(x) P_{\nu}(x) d\psi = 0$  für  $\mu \neq \nu, \mu + \nu \leq k$ . Polynome dieser

Art gibt es; sie sind eindeutig bestimmt bis auf  $P_n(x)$ , das nur bis auf das additive Glied  $c P_{n-1}(x)$  bei willkürlichem reellen  $c$  bestimmt ist. Von den  $P_r(x)$  gilt weiter:  $P_r(x)$  hat lauter reelle einfache Nullstellen; dasselbe gilt bei beliebigen reellen  $c$  auch von  $P_r(x) + c P_{r-1}(x)$ ; für  $r \geq 2$  liegt zwischen zwei konsekutiven Nullstellen von  $P_r + c P_{r-1}$  eine und nur eine Nullstelle von  $P_{r-1}$ . Weiter wird die Klasse  $C_k$  der reellen Polynome  $\varphi(x)$  vom Grad  $\leq k$  betrachtet, für die  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) d\psi(x) = 0$  ist. Die

Menge  $E_k$  von reellen Zahlen heißt eine zu  $C_k$  gehörige minimale Menge, wenn zu jedem  $\varphi(x)$  aus  $C_k$  mindestens ein  $\xi$  aus  $E_k$  gehört mit  $\varphi(\xi) = 0$  und wenn keine echte Teilmenge von  $E_k$  dieselbe Eigenschaft hat. Alle minimalen Mengen  $E_k$  werden angegeben. Z. B. wenn  $k > 3$  ungerade ist ( $k = 2n - 1$ ), so ist die einzige minimale zu  $C_k$  gehörige Menge gegeben durch das offene Intervall  $x_1 < x < x_n$ , wo  $x_1, x_n$  die beiden äußersten Nullstellen von  $P_n(x)$  sind.

Rellich (Göttingen).



**Joseph, A. W.:** The sum and integral of the product of two functions. J. Inst. Actuar. 64, 329—349 (1933).

In Skand. Aktuarie Tidskr. 1927 erschien von Steffensen eine Abhandlung mit demselben Titel. Verf. bringt hier auf einem anderen Weg dieselben und andere Resultate betreffend die Entwicklung von  $\sum_{0}^{n-1} u(x) \cdot v(x)$  resp.  $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$ . Große

Ähnlichkeit besteht auch mit der Arbeit von Aitken (dies. Zbl. 6, 215; vgl. auch Stephan, dies. Zbl. 6, 124). Den originalen Gedankengang findet man bei Tschebysheff (Collected Work I, 701—702), und das vollständige Literaturverzeichnis der Nachfolger findet man bei Aitken. Nachdem Verf. die exakte Entwicklung nach Orthogonalpolynomen, die mit  $T_r(x, n)$  bezeichnet werden ( $r$  ist der Grad des Polynoms), gegeben hat, folgt die Untersuchung der Genauigkeit, die zu erwarten ist, wenn man bei irgendeinem Gliede die Entwicklung abbricht, und zum Schluß werden auch Formeln mit „Gewichten“ aufgestellt. *Burrau* (Kopenhagen).

**Jackson, Dunham:** Series of orthogonal polynomials. Ann. of Math., II. s. 34, 527—545 (1933).

Die Entwicklung einer willkürlichen Funktion  $f(x)$  nach den Polynomen, welche im Intervall  $-1 \leq x \leq 1$  in bezug auf eine Gewichtsfunktion  $\varrho(x)$  orthogonal sind, wird mit elementaren Hilfsmitteln untersucht. Auf Grund einfacher Überlegungen (Benutzung der Christoffelschen Formel sowie der Konvergenz der „Fourierschen Konstanten“ gegen Null) beweist der Verf. das folgende Theorem: Es sei für ein festes  $x_0$  aus  $(-1, 1)$  die Folge der normierten Orthogonalpolynome beschränkt; ist die Funktion  $f(x)$  mit Ausnahme von endlich vielen Sprungstellen stetig, hat sie ferner für  $x = x_0$  eine rechtsseitige und eine linksseitige Ableitung, so konvergiert die Entwicklung für  $x = x_0$  mit  $f(x_0)$  als Summe. Es wird gezeigt, wie man eine ausgedehnte Klasse von derartigen beschränkten Polynomen gewinnt. Die Legendreschen Polynome sind für  $-1 < x_0 < 1$ , die Tschebyscheffschen Polynome  $\cos n\vartheta$  ( $\cos \vartheta = x$ ) für  $-1 \leq x \leq 1$  von dieser Art. Es ist nicht schwer, die Voraussetzungen über  $f(x)$  durch etwas allgemeinere zu ersetzen. Weiterhin wird der folgende Satz bewiesen, in dem die Beschränktheit der Polynome nicht gefordert wird: Es sei  $\varrho(x)$  summierbar und oberhalb einer positiven Schranke gelegen. Die Entwicklung konvergiert für  $x = x_0$  und stellt  $f(x_0)$  dar, wenn  $f(x)$  im ganzen Intervall  $(-1, 1)$  eine stetige Ableitung besitzt, wenn ferner in einer gewissen Umgebung von  $x_0$  auch die zweite Ableitung existiert und diese für  $x = x_0$  stetig ist. Auch diese Bedingungen lassen noch erhebliche Verallgemeinerungen zu. Der so erhaltene Vorrat an Konvergenztheoremen entspricht in mancher Beziehung der elementaren Theorie der Fourierschen Reihen.

*Szegő* (Königsberg, Pr.).

**Watson, G. N.:** Notes on generating functions of polynomials: I. Laguerre polynomials. J. London Math. Soc. 8, 189—192 (1933).

Bei der Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach normierten Orthogonalfunktionen  $\varphi_n(x)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ;  $a \leq x \leq b$ ) spielen — im Zusammenhang mit der Abelschen Summierung — Reihen von der Form

$$K(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n \varphi_n(x) \varphi_n(y) \quad (|t| < 1)$$

eine Rolle. Für die verallgemeinerten Laguerreschen Polynome

$$\varphi_n(x) = \left\{ \frac{n! e^{-x} x^\alpha}{\Gamma(n + \alpha + 1)} \right\}^{\frac{1}{2}} L_n^{(\alpha)}(x) \quad (\alpha > -1, x > 0)$$

hat Hardy [J. London Math. Soc. 7, 138—139 (1932); dies. Zbl. 4, 253] mit Hilfe der Mellinschen Formel

$$K(x, y, t) = \frac{t^{-\frac{1}{2}\alpha}}{1-t} \exp \left\{ -\frac{1}{2}(x+y) \frac{1+t}{1-t} \right\} \cdot I_\alpha \left( \frac{2\sqrt{xyt}}{1-t} \right)$$

bewiesen;  $I_\alpha$  bezeichnet hier die Besselsche Funktion mit imaginärem Argument.



Verf. gibt für dieses Resultat einen neuen, reihentheoretischen Beweis, welcher auf einer Saalschützischen Formel für verallgemeinerte hypergeometrische Funktionen beruht.

Szegö (Königsberg, Pr.).

**Watson, G. N.:** Notes on generating functions of polynomials. II. Hermite polynomials. J. London Math. Soc. 8, 194—199 (1933).

Die in dem vorangehenden Bericht formulierte Aufgabe wird hier für die Hermite'schen Funktionen

$$\varphi_n(x) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} \cdot (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n} \quad (x \text{ reell})$$

behandelt. Es gilt in diesem Falle mit der dortigen Bezeichnung

$$K(x, y, t) = \{\pi(1 - t^2)\}^{-\frac{1}{2}} \exp \left\{ \frac{4xyt - (x^2 + y^2)(1 + t^2)}{2(1 - t^2)} \right\}.$$

Verf. schreibt diese Formel Mehler (1866) zu und gibt dafür drei verschiedene Beweise: 1. Auf Grund der obigen Formel für Laguerresche Polynome (durch Kombination der Fälle  $\alpha = \pm \frac{1}{2}$ ). 2. Auf Grund der oben benutzten Saalschützischen Formel. 3. Nach Hardy mittels der Integralformel

$$e^{-x^2} = \pi^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-u^2 + 2ixu) du,$$

aus der durch Differentiation eine entsprechende Integraldarstellung für  $\varphi_n(x)$  hervorgeht.

Szegö (Königsberg, Pr.).

**Hille, Einar:** On the complex zeros of the associated Legendre functions. J. London Math. Soc. 8, 216—217 (1933).

Berichtigung zu: Hobson, E. W.: "The theory of spherical and ellipsoidal harmonics". (Vgl. dies. Zbl. 4, 210.)

**Dhar, S. C., and N. G. Shabde:** On the non-orthogonality of Legendre's functions. Bull. Calcutta Math. Soc. 24, 177—186 (1933).

If  $2a$  is an integer and  $m = a + ip$ ,  $n = a + iq$ ;  $p$  and  $q$  being real numbers neither of which is zero when  $a$  is an integer, the function  $P_n(z)$  is not orthogonal to  $P_m(z)$  in the interval  $(-1, 1)$ . When  $2a > -1$  and  $p, q$  are simply restricted to be real the function  $Q_n(z)$  is not orthogonal to  $Q_m(z)$  in the interval  $(1, \infty)$ . When  $r$  and  $s$  are integers, both even or both odd, the function  $Q_r(z)$  is not orthogonal to  $Q_s(z)$  in the interval  $(0, 1)$ . When in addition  $r + s - 2k + 2$  is an even integer the function  $P_r^{-k}(z)$  is orthogonal to  $P_s^{-k}(z)$  in the interval  $(0, 1)$ . If  $u + v + 1 > 0$  we have

$$\int_1^{\infty} Q_u^{-\frac{1}{2}}(z) Q_v^{-\frac{1}{2}}(z) dz \neq 0.$$

H. Bateman (Pasadena).

● Szegö, Gabriel: Asymptotische Entwicklungen der Jacobischen Polynome. (Schr. Königsberg. gel. Ges. Jg. 10, H. 3.) Halle a. S.: Max Niemeyer 1933. 78 S. u. 15 Fig. RM. 8.—

Der Grundgedanke der vom Verf. verwendeten Methode zur asymptotischen Entwicklung besteht hauptsächlich in der Heranziehung der Besselschen Funktionen. Diese Entwicklung besitzt gegenüber den klassischen asymptotischen Formeln und Entwicklungen (nach gewöhnlichen trigonometrischen Funktionen) den Vorteil, daß sie in jeder linksseitigen Umgebung von  $x=1$ , genauer in jedem Intervalle  $-1+\varepsilon \leq x \leq +1$  ( $\varepsilon$  ist eine feste Zahl,  $0 < \varepsilon < 2$ ) gleichmäßig gültig ist. — In der vorliegenden Arbeit wird dieses Programm für die Jacobischen (hypergeometrischen) Polynome  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  durchgeführt. Der Verf. beschränkt sich dabei auf das reelle Intervall  $-1 \leq x \leq 1$ . Im zweiten Abschnitt werden als Spezialfall die ultrasphärischen Polynome  $P_n^{(\mu)}(x)$  betrachtet. Diese werden für  $\mu$  reell  $\neq 0, -1, -2, \dots$  definiert durch die erzeugende Reihe

$$(1 - 2xw + w^2)^{-\mu} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\mu)}(x) w^n.$$

In den Fällen  $\mu = 0, -1, -2, \dots$  bricht diese Entwicklung mit dem Gliede  $n = -2\mu$  ab. Dann wird die erzeugende Funktion ersetzt durch

$$-(1 - 2xw + w^2)^{-\mu} \log(1 - 2xw + w^2).$$



Das Hauptergebnis des Verf. ist: Satz I. Für  $0 < \theta < \pi$  gilt die folgende asymptotische Entwicklung:

$$P_n^{(\mu)}(\cos \theta) \sim \sum_{m=0}^{\infty} f_m(\theta) \theta^{m-\mu+\frac{1}{2}} \frac{J_{\mu-m-\frac{1}{2}}[(n+\mu)\theta]}{(n+\mu)^{m-\mu+\frac{1}{2}}}. \quad (1)$$

Bricht man diese Reihe mit dem Gliede  $m = p - 1$  ab,  $p \geq 1$ , so ist der gemachte Fehler

$$R_p = \begin{cases} \theta^{p-\mu} O(n^{\mu-p-1}), & \text{wenn } n\theta \geq c, \\ O(n^{2\mu-2p-1}), & \text{wenn } n\theta \leq c, \end{cases}$$

wobei  $c$  eine feste positive Zahl bezeichnet. Diese Abschätzung gilt gleichmäßig im Intervalle  $0 < \theta \leq \pi - \varepsilon$ , wenn  $\varepsilon$  eine feste Zahl ist,  $0 < \varepsilon < \pi$ . Hier ist:

$$f_m(\theta) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu - m)} 2^{m-\mu+\frac{1}{2}} \left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right)^{-\mu} \varphi_m(\theta), \quad (m = 0, 1, 2, \dots)$$

wo  $\varphi_m(\theta)$  berechnet wird mittels:

$$\left(\frac{2 \cos t - 2 \cos \theta}{t^2 - \theta^2}\right)^{-\mu} = \left(\frac{\sin \theta}{\theta}\right)^{-\mu} \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m(\theta) (\theta^2 - t^2)^m; \quad \varphi_0(t) = 1.$$

Die Restabschätzung ist zwar für kleine Werte von  $\theta$  genauer als in dem Falle der klassischen auf Stieltjes u. a. zurückgehende Entwicklung nach trigonometrischen Funktionen, wo  $R_p = (\sin \theta)^{-p} O(n^{\mu-p-1})$  gleichmäßig im Intervalle  $0 < \theta < \pi$ , jedoch demgegenüber steht nach der Meinung des Ref. der nicht unerhebliche Nachteil, daß das Bildungsgesetz der Koeffizienten  $\varphi_n(\theta)$  sehr verwickelt ist, während dagegen die Koeffizienten in der trigonometrischen Reihe besonders einfach sind, wodurch diese letztere Reihe ohne Beschwerde beliebig weit fortgesetzt werden kann. — Im dritten Abschnitt werden diese Ergebnisse ausgedehnt auf die allgemeinen Jacobischen Polynome  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ . Diese werden für beliebige reelle Werte von  $\alpha$  und  $\beta$  definiert durch die Entwicklung

$$\frac{2^{\alpha+\beta} \Phi(w) \Psi(w)}{Q(w)} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) w^n \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

wo

$$Q(w) = \sqrt{1 - 2wx + w^2}; \quad \Phi(w) = [1 - w + Q(w)]^{-\alpha}; \quad \Psi(w) = [1 + w + Q(w)]^{-\beta}.$$

Die ultrasphärischen Polynome bilden einen Spezialfall der Jacobischen Polynome. Es gilt nämlich, für  $\mu = \alpha + \frac{1}{2}$ :

$$P_n^{(\alpha, \alpha)}(x) = \frac{\Gamma(2\mu)}{\Gamma(\mu + \frac{1}{2})} \frac{\Gamma(n + \mu + \frac{1}{2})}{\Gamma(n + 2\mu)} P_n^{(\mu)}(x).$$

Die asymptotische Entwicklung der Polynome  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  unterscheidet sich von der Entwicklung (1) in der Hauptsache dadurch, daß sie statt der Besselschen Funktionen gewisse Verallgemeinerungen  $J_{\nu, m}(\xi)$  derselben enthält. Das Hauptergebnis ist: Satz II. Für  $0 < \theta < \pi$  gilt die folgende asymptotische Entwicklung:

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(\cos \theta) \sim \left(\sin \frac{\theta}{2}\right)^{-\alpha} \left(\cos \frac{\theta}{2}\right)^{-\beta} \sqrt{\frac{\theta}{\sin \theta}} \sum_{m=0}^{\infty} \theta^m \left\{ \sum_{\nu=0}^m f_{m, \nu}(\theta) J_{\alpha+\nu, m}(n'\theta) \right\}$$

$$n' = n + \frac{\alpha + \beta + 1}{2}.$$

Bricht man diese Reihe mit dem Gliede  $m = p - 1$  ab,  $p \geq 1$ , so ist der gemachte Fehler

$$R_p = \begin{cases} \theta^{p-\alpha-\beta} O(n^{-\alpha-\beta}), & \text{wenn } n\theta \geq c, \\ O(n^{\alpha-\beta}), & \text{wenn } n\theta \leq c, \end{cases} \quad \lambda_p = \frac{1}{2} + \left[\frac{p+1}{2}\right].$$

$c$  ist eine feste positive Zahl. Auch diese Abschätzung gilt gleichmäßig im Intervalle

$$0 < \theta \leq \pi - \varepsilon \quad (0 < \varepsilon < \pi).$$

Die Funktionen  $f_{m, \nu}(\theta)$  sind ziemlich verwickelt von  $\theta, \alpha, \beta$  abhängige Funktionen, von denen der Verf. die ersten 6 berechnet hat.

$$J_{\nu, m}(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} z^{-\nu-1} (z + z^{-1})^m \exp\left\{\frac{1}{2}\xi(z - z^{-1})\right\} dz \quad (\nu \text{ beliebig reell, } m \geq 0, \Re \xi > 0).$$

Die Funktionen  $J_{\nu, m}$  können leicht als lineare Aggregate der Besselschen Funktionen dargestellt werden, z. B.:

$$J_{\nu, m}(\xi) = \sum_{h=0}^m \binom{m}{h} J_{m-2h+\nu}(\xi).$$

Der Verf. wendet seine Ergebnisse zur Verallgemeinerung einer von Bernstein [J. Math.



pures appl., IX. s. 9, 127—177 (1930)] behandelten Aufgabe an, nämlich das asymptotische Verhalten zu untersuchen von

$$\max_{-1 \leq x \leq 1} (1-x)^{\lambda} (1+x)^{\mu} |P_n^{(\alpha, \beta)}(x)| \quad \lambda \text{ und } \mu \geq 0$$

für große Werte von  $n$ , und die entsprechende Aufgabe für Integrale. Im vierten Abschnitt wird die mechanische Quadratur auf Jacobischen Abszissen behandelt [d. h. eine beliebige im Intervalle  $-1 \leq x \leq 1$  definierte Funktion wird durch das Lagrangesche Interpolationspolynom  $(n-1)$ -ten Grades ersetzt, welches in den Nullstellen des  $n$ -ten Jacobischen Polynoms  $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$  mit  $f(x)$  übereinstimmt]. Der Verf. bildet nun das Integral (Quadraturwert)  $Q_n[f]$  des Interpolationspolynoms über das Intervall  $-1, +1$  und beweist: Satz III. a) Ist  $\text{Max}(\alpha, \beta) > \frac{3}{2}$ , so existieren überall stetige Funktionen  $f(x)$ , für welche die Quadraturwerte  $Q_n[f]$  divergieren, wenn  $n \rightarrow \infty$ . b) Ist  $\text{Max}(\alpha, \beta) < \frac{3}{2}$ , so konvergieren die Quadraturwerte  $Q_n[f]$  für  $n \rightarrow \infty$  gegen  $\int_{-1}^{+1} f(x) dx$ , wenn nur  $f(x)$  eine beliebige, im Intervalle  $-1, +1$  im

Riemannschen Sinne integrierbare Funktion bedeutet. — Diese Behauptung gilt auch im Falle  $\alpha = \beta = \frac{3}{2}$  [der Verf. vermutet, daß sie auch gilt im Falle  $\text{Max}(\alpha, \beta) = \frac{3}{2}$ ,  $\alpha \neq 0$ ; für diesen Fall versagt jedoch seine Schlußweise]. Für  $\alpha = \beta = 0$  findet man die klassische Gaußsche mechanische Quadratur. — Im Anhang gibt der Verf. mit analogen Überlegungen wie im zweiten Abschnitte die nach den Besselschen Funktionen fortschreitende asymptotische Entwicklung der (Hobsonschen) zugeordneten Funktionen  $P_n^{\nu}(\cos \theta)$  (siehe E. W. Hobson: Spherical and ellipsoidal harmonics, Camb. Univ. Press 1931). Er beweist als Gegenstück zu Satz I: Satz IV. Es gilt bei festem  $\nu$  für  $0 < \theta \leq \pi - \varepsilon$  die asymptotische Entwicklung

$$P_n^{\nu}(\cos \theta) \sim \sum_{m=0}^{\infty} f_m^*(\theta) \theta^m \frac{J_{m-\nu}[(n+\frac{1}{2})\theta]}{(n+\frac{1}{2})^{m-\nu}}.$$

Die Funktionen  $f_m^*(\theta)$  sind von derselben Beschaffenheit wie die Funktionen  $f_m(\theta)$  von Satz I und hängen mit diesen eng zusammen. Es ist dabei  $\mu = \nu + \frac{1}{2}$  zu setzen. Die Restabschätzung lautet in der üblichen Bezeichnung:

$$R_p = \begin{cases} \theta^{p-\frac{1}{2}} O(n^{\nu-p-\frac{1}{2}}), & \text{wenn } n \geq c, \\ \theta^{2p-\nu} O(1), & \text{wenn } n \leq c. \end{cases}$$

S. O. van Veen (Dordrecht).

Jordan, Charles: Interpolation without printed differences, in the case of two or three independent variables. J. London Math. Soc. 8, 232—240 (1933).

In einer früheren Arbeit hat Verf. [Atti del Congresso Internazionale dei Matematici Bologna 4, 157—177 (1928)] eine Interpolationsformel angegeben, welche keine Differenzen der zu interpolierenden Funktion enthielt, sondern nur Funktionswerte selbst, in der Umgegend der zu interpolierenden Stelle, mit gewissen Zahl faktoren versehen, die in Tabellenform niedergelegt waren. Bei einer Interpolation vom dritten Grad lautete die Formel, wenn  $u$  zwischen den Tafelargumenten  $a$  und  $a+h$  liegt:

$$f(u) = J_1 + C_1(x) \cdot [J_1 - J_2], \quad x = \frac{u-a}{h}, \quad (1)$$

wo  $I_{\nu}$  linear zwischen  $f(a-\nu h+h)$  und  $f(a+\nu h)$  interpoliert ist und

$$C_s(x) = (-1)^s \cdot \binom{x+s-1}{2s},$$

hier mit  $s=1$ , aus der Tabelle zu entnehmen ist. — Ausgehend von (1) entwickelt Verf. eine entsprechende Interpolationsformel für Funktionen von zwei Variablen  $f(u, v)$ . Bezeichnen  $a, a+h$ ;  $b, b+k$  die vier nächstbenachbarten Tafelargumente bei der zu interpolierenden Stelle, so wird

$$f(u, v) = S_{11} + C_1(x)[S_{11} - S_{21}] + C_1(y)[S_{11} - S_{12}] + C_1(x)C_1(y) \cdot [S_{11} + S_{22} - S_{12} - S_{21}] \quad (2)$$

$$x = \frac{u-a}{h}, \quad y = \frac{v-b}{k},$$

wo die  $S_{\nu\mu}$  durch aufeinanderfolgende lineare Interpolation bezüglich  $u$  und  $v$  aus den Punktquadrupeln  $(a+\nu h, b+\mu k)$ ,  $(a+\nu h, b-\mu k+k)$ ,  $(a-\nu h, b+\mu k)$ ,  $(a-\nu h, b-\mu k+k)$  gewonnen sind. — Ein ausgeführtes Beispiel ( $f$  = unvollständige Gammafunktion) zeigt, wie die Rechnung, insbesondere bei Benutzung von

Rechenmaschinen, anzuordnen ist; sie ist nicht umfangreicher als die bei der Everettschen Formel unter Benutzung von Tafeldifferenzen erforderliche. — Verf. schreibt noch die Interpolationsformel an für den Fall, daß man die Funktion  $f$  durch ein Hyperboloid vom 9. Grad [statt vom 5. wie in (2)] ersetzt. Ferner ergibt sich ohne Mühe die Erweiterung der Interpolationsformel auf Funktionen von drei Variablen, sowie eine Interpolationsformel für die partiellen Ableitungen. *S. Gradstein.*

**Sharma, J. L.:** On expansions in Lamé's functions and their applications to the evaluation of certain definite integrals. Errata. Bull. Calcutta Math. Soc. 24, 219—221 (1933).

Vgl. dies. Zbl. 6, 313.

**MacRobert, T. M.:** Proofs of some formulae for the hypergeometric function. Philos. Mag., VII. s. 16, 440—449 (1933).

A set of 15 recurrence formulae is first listed, corrections being made to two of the formulae printed in Gauss' works. The recurrence formulae are then used to find Gauss' value for  $F(a, b; c; 1)$  when  $c - 1$  is not a negative integer and  $c - a - b$  has a positive real part. — Kummer's method is used to establish the formulae for the analytical continuation of the hypergeometric function and is used also to prove the formula

$$Q_n^m(z) = \frac{\Gamma(m+n+1)\Gamma(m-n)}{2\Gamma(m+1)} \left\{ x^{\frac{1}{2}m} y^{-\frac{1}{2}m} F(-n, n+1; m+1; x) \right. \\ \left. - e^{\mp n\pi i} x^{-\frac{1}{2}m} y^{\frac{1}{2}m} F(-n, n+1; m+1; -y) \right\}$$

for the associated Legendre function  $Q_n^m(z)$ , where  $z = 2x - 1 = 1 + 2y$ .

*H. Bateman (Pasadena).*

### Differentialgleichungen:

**Kameda, Toyojiro:** On an integrable class of differential equations. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 15, 184—194 (1933).

With the aid of the elements of the theory of conjugate functions the author obtains an integrating factor of the differential equation  $\frac{dy}{dx} = \tan f(x, y)$ , where  $f(x, y)$  is harmonic.

*I. S. Sokolnikoff (Madison, U. S. A.).*

**Bureau, Florent:** Recherches sur les fonctions définies par les équations différentielles du premier ordre et du premier degré. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, III. s. 18, H. 1, 1—53 (1933).

Verf. untersucht die Riemannschen Flächen der durch eine Differentialgleichung

$$Xdx + Ydy = 0 \quad (X = ax + by + \dots, \quad Y = a'x + b'y + \dots)$$

definierten Funktionen  $y(x)$  so weit, als die Werte von  $y(x)$  und  $x$  in der Umgebung des Unbestimmtheitspunktes  $x = y = 0$  liegen. Wenn das Verhältnis der Wurzeln  $\lambda_1, \lambda_2$  der Gleichung

$$\begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ a' & b' - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

weder 0, noch  $\infty$ , noch reell negativ, noch ganzzahlig oder ein echter Bruch ist, läßt sich nach Poincaré die Gleichung  $Xdx + Ydy = 0$  durch eine eindeutige reguläre Transformation in die elementar integrierbare Gleichung

$$(ax + by)dx + (a'x + b'y)dy = 0$$

überführen. Verf. studiert eingehend die Riemannschen Flächen der Lösungen  $y(x)$  dieser Gleichung und kommt nach einer tiefgehenden Analyse zu dem Schluß, daß die Riemannschen Flächen für die Lösungen der allgemeineren Gleichung  $Xdx + Ydy = 0$  in der Nachbarschaft von  $x = y = 0$  von derselben topologischen Beschaffenheit sind wie jene. Für den Fall, daß  $\lambda_1, \lambda_2$  eine ganze Zahl ( $\neq 0$ ) oder ein echter Bruch ist, benutzt Verf. die von Bendixson und Dulac angegebenen Normalformen des Integrals zum Studium der Riemannschen Flächen.

*Kähler (Hamburg).*



**Persidski, K. P.:** Au sujet du problème de „stabilité“. Bull. Soc. phys.-math. Kazan 5, Nr 3, 56—62 (1931) [Russisch].

Naheliegende Verallgemeinerung eines Kriteriums von Liapounoff für die Nichtstabilität der Lösung  $x_i = 0$  des Systems

$$\frac{dx_i}{dt} = Y_i(x_1, \dots, x_n, t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad Y_i(0, \dots, 0, t) = 0:$$

wenn eine für  $t > t_0$  beschränkte, in bezug auf die  $x_i$  positiv definite Funktion  $V(x_1, \dots, x_n, t)$  von der Beschaffenheit existiert, daß

$$-VA(t) + \sum \frac{\partial V}{\partial x_k} Y_k + \frac{\partial V}{\partial t} > 0$$

ausfällt, und  $\exp \int_{t_0}^t A dt$  für gewisse  $t > t_0$  beliebig groß wird, ist die genannte Lösung nicht stabil. W. Stepanoff (Moskau).

**Malkine, Y. G.:** Problème de l'existence des fonctions de Liapounoff. II. Bull. Soc. phys.-math. Kazan 5, Nr 3, 63—84 (1931) [Russisch].

Ergänzungen und Anwendungen der Resultate eines früheren Artikels des Verf. (Bull. Soc. phys.-math. Kazan 4, 51—62; dieses Zbl. 2, 417, wo man auch die zugehörigen Definitionen findet). Im Falle von zwei Gleichungen,

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = Y(x, y), \quad X(0, 0) = Y(0, 0) = 0,$$

wird bewiesen: Ist die Lösung  $x = 0, y = 0$  stabil, so existiert eine verallgemeinerte Liapounoffsche Funktion, welche auf den etwa vorhandenen Gleichgewichtslinien unstetig werden kann; gibt es keine Gleichgewichtslinien in der Umgebung von  $(0, 0)$ , so existiert auch eine eigentliche L. F. Ist die Lösung  $x = 0, y = 0$  stabil, und existiert keine L. F.  $V$  mit definitem  $VV$ , so besitzen die Gleichungen entweder Gleichgewichtslinien oder ein Integral  $V(x, y) = \text{konst.}$ ,  $V$  definit. Anwendung. Die Differentialgleichungen haben die Form:  $\frac{dx}{dt} = X_m + X'$ ,  $\frac{dy}{dt} = Y_m + Y'$  ( $A$ ), die rechten Seiten holomorph,  $X_m$  und  $Y_m$  von  $m$ -ter Dimension,  $X'$  und  $Y'$  von der höheren; ist die Bewegung  $\frac{dx}{dt} = X_m$ ,  $\frac{dy}{dt} = Y_m$  ( $B$ ) asymptotisch stabil, so gilt dasselbe auch für ( $A$ ); Verallgemeinerung auf  $n$  Variable. Wenn dagegen die Lösung  $(0, 0)$  von ( $B$ ) stabil, aber nicht asymptotisch ist, kann die entsprechende Lösung von ( $A$ ) bei einer geeigneten Wahl von  $X', Y'$  stabil sowie unstabil sein. W. Stepanoff (Moskau).

**Rosenblatt, Alfred:** Sur les théorèmes de M. Picard dans la théorie des équations différentielles du second ordre non linéaires. Bull. Soc. Math. Grèce 14, Nr 1, 7—15 (1933).

Given the equation  $y'' = f(x, y, y')$ , consider the problem of determining a solution which vanishes for  $x = 0$  and which takes on a given value  $B$  for  $x = b$ . In his previous work on the problem, the author replaced the assumptions concerning  $f(x, y, y')$ , made by Picard in his classical investigations, by less restrictive ones. In the present paper the author improves his own previous results by showing that it is sufficient to assume that  $f(x, y, y')$  satisfies an inequality of the type

$$|f(x, y_1, y'_1) - f(x, y_2, y'_2)| \leq \alpha |y_1 - y_2|/x^2(b - x^2) + \beta |y'_1 - y'_2|/x(b - x),$$

where  $\alpha, \beta$  are positive constants. If the constants  $\alpha, \beta, b, B$  satisfy proper restrictions, then the solution exists and is unique. The method of successive approximations is used to establish these results. An example is added which illustrates the role of the inequalities to which the constants of the problem have been subjected. *Tibor Radó.*

**Trjitzinsky, W. J.:** The general case of non-homogeneous linear differential equations. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 19, 687—690 (1933).

The author establishes the asymptotic character of solutions of the equation  $L_n(y) = b(x)$ , where  $L_n(y) \equiv \sum_{i=0}^n a_i(x) y^{(n-i)}$  ( $i = 0, 1, \dots, n$ ), with  $a_0(x) \neq 0$  and

$a_n(x) \neq 0$ . The  $a_i(x)$  and  $b(x)$  for  $|x| \geq p_0$  are representable by convergent series of the type

$$a_\mu x^\mu + a_{\mu-1} x^{\mu-1} + \dots + a_1 x + a_0 + a_{-1} x^{-1} + \dots,$$

where  $p(\geq 1)$  is an integer. — The treatment is based on the results of an unpublished paper treating the corresponding homogeneous problem, which the author "has completely developed (with no restrictions on the roots of the characteristic equation) in a detailed paper to appear elsewhere". — The major part of the present paper is an abstract of the main results of the unpublished paper, which are embodied in the Fundamental Existence Theorem, and with its aid he formulates the Existence Theorem for the non-homogeneous case.

I. S. Sokolnikoff (Madison, U. S. A.).

Yosida, Kôsaku: A remark to a theorem due to Halphen. Jap. J. Math. 9, 231 bis 232 (1933).

In this paper the differential equation:

$$P_0(x) \frac{d^n y}{dx^n} + P_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + P_n(x) y = 0,$$

is subject to the following conditions: (1) the coefficients are polynomials, (2) the degree,  $p$ , of  $P_0(x)$  is not less than that of any other coefficient, (3) the singular points,  $a_i$  ( $i=1, 2, \dots, p$ ), which lie in the finite  $x$ -plane, are regular, (4) the quotient of any two solutions is single valued. The author then proves that the general solution of the differential equation is of the form

$$y(x) = \sum_{i=1}^n C_i y_i(x), \text{ where } y_i(x) = \prod_{j=1}^p (x - a_j)^{\nu_j} \{e^{\lambda_i x} R_i(x)\},$$

$\nu_j$  and  $\lambda_i$  being definite constants and  $R_i(x)$  a rational function. Conversely, any function  $y_i(x)$  will satisfy a linear differential equation of the type given, such that  $\lim_{x \rightarrow \infty} P_i(x)/P_0(x)$  is finite,  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Davis (Bloomington).

Vahlen, K. Th.: Über den Heaviside-Kalkül. Z. angew. Math. Mech. 13, 283—298 (1933).

Der Verf. löst die linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und mit verschiedenen Anfangsbedingungen durch eine symbolische Rechnung der Operatoren  $f(D)$  ( $f$  rational,  $D = \frac{d}{dx}$ ). Zu diesem Zwecke definiert er wie gewöhnlich die Grundoperatoren  $(D + a)^n$ ,  $(D + a)^{-n}$  (den letzten mit verschiedenen Bestimmungen gemäß den verschiedenen Anfangsbedingungen); durch diese Operatoren werden nun die allgemeineren Operatoren  $f(D)$  erklärt.

L. Fantappiè (Bologna).

Kryloff, B. L.: Zu einer Arbeit von J. Lutz: Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung usw. Bull. Soc. phys.-math. Kazan 5, Nr 3, 85—89 (1931).

Einwendungen gegen die Arbeit von Lutz (S.-B. Bayer. Akad. Wiss. M.-N. Klasse 1926, 231—277). Es handelt sich vornehmlich um Fehler, die dadurch entstanden sind, daß die Ausnahmefälle der korrelativen Zuordnungen (Lehre von den Elementarteilern) nicht genügend beachtet worden sind.

L. Schrutka (Wien).

Schauder, J.: Über das Dirichletsche Problem im Großen für nicht-lineare elliptische Differentialgleichungen. Math. Z. 37, 623—634 (1933).

S. Bernstein hat in einer berühmten Arbeit [Sur la généralisation du problème de Dirichlet. Math. Ann. 69 (1910)] die erste Randwertaufgabe für quasilineare elliptische Differentialgleichungen im Großen gelöst. Ziel der vorliegenden Arbeit ist es, die verwickelten Beweisgänge von Bernstein zum Teil zu vereinfachen. — In der Hauptsache handelt es sich um den Satz: Falls im voraus bekannt ist, daß die „inhomogene“ Differentialgleichung vom elliptischen Typus

$$(*) \quad A(x, y, z, p, q) r + 2 B(x, y, z, p, q) s + C(x, y, z, p, q) t = \psi(x, y)$$

bei beliebigem  $\psi(x, y)$  und beliebigen Randwerten  $\varphi(s)$  höchstens eine



Lösung zuläßt, dann besitzt die entsprechende „homogene“ Differentialgleichung

$$(*) \quad A(x, y, z, p, q) r + 2 B(x, y, z, p, q) s + C(x, y, z, p, q) t = 0$$

für beliebiges (genügend reguläres)  $\varphi(s)$  immer eine Lösung. Als  $x, y$ -Bereich [auf dessen Rand die Werte  $\varphi(s)$  vorgegeben sind] wird der Bequemlichkeit halber ein Kreis gewählt; wesentlich wird nur gebraucht, daß das Gebiet im eigentlichen Sinne konvex ist. — Beweisgang: Neben den Randwerten  $\varphi(s)$  wird die Schar der Randwerte  $\lambda\varphi(s)$  mit  $0 \leq \lambda \leq 1$  betrachtet. Zu  $\lambda = 0$  gibt es eine Lösung von  $(*)$ , nämlich  $z \equiv 0$ . Daher wegen der vorausgesetzten Eindeutigkeit von  $(*)$  auch für hinreichend kleine  $\lambda$ . Sei  $\lambda_0 < 1$  eine Schwelle, derart, daß  $(*)$  für  $\lambda\varphi(s)$  mit  $\lambda < \lambda_0$  lösbar wäre, hingegen nicht mit  $\lambda > \lambda_0$ . Die Lösungen  $z_\lambda$  (mit  $\lambda < \lambda_0$ ) sind nun samt allen ihren Ableitungen zweiter Ordnung, absolut genommen, unabhängig von  $\lambda$  ( $0 \leq \lambda \leq 1$ ) beschränkt, und es genügen die zweiten Ableitungen einer Hölder-Bedingung mit von  $\lambda$  unabhängigen Koeffizienten. Also ist  $z_{\lambda_0}$  auch eine zweimal Hölderstetig differenzierbare Funktion und genügt  $(*)$ , woraus die Lösbarkeit für geeignete  $\lambda > \lambda_0$  folgt; es gibt keine „Schwelle“, die Randwertaufgabe ist auch für die Randwerte  $\varphi(s)$  lösbar. Der schwierigste Teil des Beweises ist natürlich die Abschätzung der ersten und zweiten Ableitungen von  $z_\lambda$  (von S. Bernstein übernommen) sowie der Hölder-Konstanten der zweiten Ableitungen (nach Sätzen des Autors und E. Hopfs). Die dritten Ableitungen von  $\varphi(s)$  müssen einer Hölder-Bedingung genügen. *Rellich* (Göttingen).

**Muschelišvili, N.:** Praktische Lösung der fundamentalen Randwertaufgaben der Elastizitätstheorie in der Ebene für einige Berandungsformen. *Z. angew. Math. Mech.* **13**, 264—282 (1933).

Der Verf. hat bereits in früheren Arbeiten, insbesondere *Math. Ann.* **107** (1932); dies. Zbl. **5**, 358, eine Theorie der Randwertaufgaben für das Bipotential entwickelt, bei der unter Ausnützung einiger elementarer Eigenschaften des Cauchyschen Integrals jene Funktion benützt wird, die den vorgelegten Bereich auf das Innere bzw. das Äußere eines Kreises abbildet. Im Anschluß an diese Arbeiten werden hier spezielle Probleme der zweidimensionalen Elastizitätstheorie behandelt. Im allgemeinen erfordert die Erledigung des Problems noch die Auflösung einer Fredholmschen Integralgleichung, wenn aber die Abbildungsfunktion eine in der Ebene des Kreises rationale Funktion ist, so ergibt sich die Lösung unmittelbar. Dieses Lösungsverfahren wird an speziellen Beispielen erörtert, die die Kreisscheibe und den Außenraum einer Ellipse betreffen, und zwar sowohl für den Fall, daß die Kräfte als auch für den Fall, daß die Verschiebungen gegeben sind. Einige weitere Anwendungsbeispiele werden kurz angedeutet. *Funk.*

**Gennusa, S.:** Integrazione per quadrature dell'equazione differenziale  $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y)$ . *Atti Accad. naz. Lincei, Rend.*, VI. s. **17**, 903—908 (1933).

Durch eine (vom Ref. angegebene) Methode wird die partielle Differentialgleichung dritter Ordnung

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + a \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y)$$

mit den Cauchyschen Anfangsbedingungen

$$z(x_0, y) = \varphi_0(y), \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x=x_0} = \varphi_1(y), \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right)_{x=x_0} = \varphi_2(y)$$

aufgelöst. Die Lösung  $z(x, y)$  wird mit drei Quadraturen durch die Formel

$$z(x, y) = \varphi_0(y) + (x - x_0) \varphi_1(y) + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{d\lambda}{\lambda^2} \int_{x_0}^x e^{\frac{x-t}{\lambda}} dt \left\{ \int_{x_0}^t [\lambda^2 f(\tau, y + a\lambda^2(\tau - t)) + \lambda \varphi_2(y + a\lambda^2(\tau - t)) + \varphi_1(y + a\lambda^2(\tau - t))] d\tau + \varphi_0(y + a\lambda^2(x_0 - t)) \right\}$$

ausgedrückt, wo  $C_0$  eine geschlossene Kurve bedeutet, die nur die singuläre Stelle  $\lambda = 0$  einschließt.

*L. Fantappiè* (Bologna).

**Coissard, Maurice:** Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du troisième ordre, à deux variables indépendantes. Bull. Soc. Math. France **61**, 141—157 (1933).

The method for integrating pencils (faisceaux) of transformation symbols devised by Vessiot [Bull. Soc. Math. France **52**, 336—395 (1924)] is employed. Let  $E$  denote an equation which, in addition to having the properties mentioned in the title, is non-linear and has its three families of characteristics coincident. Any  $E$  has a non-complete pencil  $S$  of singular symbols of degree three. If  $S^1$ , the derived pencil of  $S$ , is complete,  $E$  is called an equation  $\mathcal{E}$ . The author proves: (1)  $S$  has invariants only if  $S^1$  is complete; (2) The integral surfaces of an  $\mathcal{E}$  are generated by characteristic manifolds of Cauchy which depend on seven arbitrary constants and can be associated to give the surfaces without additional integration; (3) If an  $E$  is integrable by the method of Darboux, it is an  $\mathcal{E}$ .

*J. M. Thomas* (Durham).

**Levi, Ugo:** Intorno alle varietà a tre dimensioni che rappresentano un sistema di equazioni differenziali lineari alle derivate parziali del 2° e del 3° ordine. Rend. Semin. mat. Univ. Padova **4**, 27—37 (1933).

Es werden solche  $V_3$  in einem projektiven ebenen Raume untersucht, deren homogene Koordinaten als Integrale eines Systems von linearen partiellen Differentialgleichungen (in einer unbekannten Funktion dreier unabhängigen Parameter) dargestellt werden können. Mit  $h_s$  soll die Anzahl der linear unabhängigen Gleichungen der Ordnung  $s$  in dem obenerwähnten System bezeichnet werden. Der Autor befaßt sich mit den Fällen  $h_2 = 3, h_3 = 6, 7$  ( $h_2 = 3$  hat zur Folge  $6 \leq h_3 < 10$ ). Ist  $h_3 = 6$ , so besteht die  $V_3$  aus einem Projektionskegel einer Fläche, welcher kein System zweiter oder dritter Ordnung assoziiert werden kann. Der Fall  $h_3 = 7$  bietet drei mögliche Typen von  $V_3$  dar, von denen der vom Darboux (Leçons sur la théorie générale des surfaces, Bd. 4 n. 1093) behandelte der wichtigste ist. Die Beweisführung beruht (ähnlich wie bei Terracini (Reale Acc. delle Scienze di Torino, 1915—1916) auf dem Begriff der ebenen Kurve, welche mittels der Koeffizienten der betrachteten Differentialgleichung bestimmt ist.

*Hlavatý* (Praha).

**Tonolo, Angelo:** Integrazione dell'equazione delle onde sferiche smorzate e forzate. Rend. Semin. mat. Univ. Padova **4**, 52—66 (1933).

Es sei  $U(x, y, z, t)$  eine beliebige Lösung von

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - kU = 0$$

und  $S$  ein  $x, y, z$ -Raumstück mit der Begrenzungsfläche  $\sigma$ . Dann wird  $U(x, y, z, t)$  dargestellt durch die Werte, die  $U$  und  $U_t$  in  $S$  zur Zeit  $t = 0$  annehmen und durch die Werte von  $U$  und seiner Normalableitung zur Zeit  $t$  auf der Begrenzungsfläche  $\sigma$ . In der üblichen Weise gehen in diese Darstellung die Besselschen Funktionen ein.

*Rellich* (Göttingen).

**Basch, Alfred:** Zur Geometrie des Laplaceschen Feldes. Anz. Akad. Wiss., Wien Nr **18**, 195—198 (1933).

Vorläufige Mitteilung. Die Niveaufächenschar eines skalaren Größenfeldes  $v(\tau)$  ist geeignet, bei entsprechender Skalierung Niveaufächenschar eines Laplaceschen Feldes zu sein, wenn sich das Verhältnis  $\nabla^2 v: (\nabla v)^2$  auf einer Niveaufäche nicht ändert. Daraus ergibt sich die Differentialgleichung sämtlicher Laplacescher Niveaufächenscharen  $\left(\nabla \frac{\nabla^2 v}{(\nabla v)^2}\right) \times \nabla v = 0$ . Geometrische Deutung. Bei ebenen Laplaceschen Feldern ergeben sich drei verschiedene Kreuzungstypen bei irgend zwei Kurven der Ebene; hieraus entspringt eine Einteilung der Laplaceschen Felder in drei Arten.

*L. Schrutka* (Wien).

**Opatowski, Isacco:** Sulle linee di forza dei potenziali Newtoniani simmetrici. Atti Accad. Sci. Torino **68**, 135—146 (1933).

Bedeutung  $q_1$  und  $q_2$  thermometrische Parameter eines achsensymmetrischen Koordinatensystems, so wird das Newtonsche achsensymmetrische Potential häufig



unter der Form einer Produktreihe:  $V = \sum_c X_c(\varrho_1) \cdot Y_c(\varrho_2)$  angegeben, wobei die Funktionen  $X_c(\varrho_1)$  und  $Y_c(\varrho_2)$  den folgenden Gleichungen genügen:

$$\frac{d^2 X_c}{d\varrho_1^2} = c\alpha^2 X_c, \quad \frac{d^2 Y_c}{d\varrho_2^2} = -c\beta^2 Y_c,$$

wo  $c$  eine willkürliche Konstante,  $\alpha$  und  $\beta$  zwei von dem Koordinatensystem allein abhängige Funktionen von  $\varrho_1$  und  $\varrho_2$  sind. Es wird gezeigt, daß die dem Potential  $V$  zugehörigen Kraftlinien durch die Gleichung

$$\sum_c \frac{1}{c} \frac{dX_c}{d\varrho_1} \frac{dY_c}{d\varrho_2} = \text{konst.}$$

dargestellt sind. Die Konvergenz der die Kraftlinien darstellenden Reihe wird erörtert. Endlich werden einige konkrete Beispiele behandelt. *G. Cimmino (Napoli).*

### Differenzgleichungen:

**Kimball, B. F.:** The application of Bernoulli polynomials of negative order to differencing. *Amer. J. Math.* **55**, 399—416 (1933).

The author first derives a series expansion (1) for  $\Delta_w^n f(x)$  in terms of Bernoulli polynomials of negative order  $B_r^{-n}(x, w)$  [as defined by Nörlund, *Differenzenrechnung* 1924]. He then expresses  $B_{2m}^{-n}(-n/2, 1)$  as a linear combination of the binomial coefficients  $\binom{n}{s}$  ( $s = 1, 2, \dots, m$ ), obtains an upper bound for this function of  $m$  and  $n$ , and hence finds the asymptotic value of  $g(n) = \sum_{m=1}^{\infty} [B_{2m}^{-n}(-n/2, 1)/(n/2)^{2m}]$ .

Applications are made to the convergence of series (1) in a particular case, and to the determination of the asymptotic form (as  $n \rightarrow \infty$ ) of  $\Delta_1^n f(x)$  when  $f(x)$  is  $x^{n+q}$ ,  $x^{n-q} \log x$ , and  $\log x$ . *C. R. Adams (Providence).*

**Milne-Thomson, L. M.:** The exact difference equation of the first order. *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **29**, 373—381 (1933).

The author determines necessary and sufficient conditions for exactness of the difference equation of first order (not necessarily linear)

$$M(x, u) + N(x, u, \Delta u) \Delta u = 0, \quad (1)$$

where  $u = u(x)$  and  $\Delta u = u(x+1) - u(x)$ ; he also gives an expression for the primitive of an exact equation (1). The question of existence of a multiplier analogous to Euler's integrating factor for a differential equation is examined, and it is shown that the result obtained includes the known fact that for a linear equation any solution of the homogeneous adjoint equation is such a multiplier. *C. R. Adams (Providence).*

**Trjitzinsky, W. J.:** Analytic theory of linear  $q$ -difference equations. *Acta math.* **61**, 1—38 (1933).

The equation considered is essentially

$$y(q^n x) + a_1(x) y(q^{n-1} x) + \dots + a_n(x) y(x) = 0, \quad (1)$$

in which the coefficients  $a_i(x)$  are analytic for  $|x| < \varrho$ ,  $a_n(x) \not\equiv 0$ , and  $q$  is a constant of modulus  $> 1$ . The author assumes that not all the  $a_i(0)$  vanish (no actual restriction). Under all circumstances the existence of  $n$  linearly independent formal series solutions of (1) is known, each series involving a certain rational number  $\mu_j$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ). It is also known that that series or those series for which  $\mu_j$  is least converge in the vicinity of  $x = 0$ , and that the remaining formal series may converge or diverge. The important problem of determining whether there always exists a full set of  $n$  linearly independent analytic solutions of (1), of which those associated with values of  $j$  other than that or those for which  $\mu_j$  is least have some asymptotic relationship to the corresponding formal solutions, has previously been left open. The present paper gives a solution of this problem by transforming the equation (1) into a difference equation by means of the substitution  $x = \exp(t \log q)$

and applying the methods, with suitable modifications, employed by Birkhoff and Trjitzinsky in their recent study of singular difference equations [Acta math. **60**, 1—89 (1933); this Zbl. **6**, 168—169]. — Several of the author's statements concerning the work of previous writers on  $q$ -difference equations are inadequate or unprecise; in particular Grévy is not mentioned and Carmichael is credited with certain results which he did not obtain but which are a consequence of the much earlier work of Grévy.

C. R. Adams (Providence).

**Li, Ta: Die Ordnungszahlen linearer Differenzen-Gleichungssysteme.** Acta math. **61**, 81—104 (1933).

A system of difference equations of the form

$$x_\nu(t+1) = \sum_{\mu=1}^n f_{\nu\mu}(t) x_\mu(t) \quad (\nu = 1, 2, \dots, n)$$

is here considered, where  $t$  runs over the integers  $0, 1, 2, \dots$  while the coefficients  $f_{\nu\mu}(t)$  and the solutions  $x_\nu(t)$  may take any complex values and where the  $|f_{\nu\mu}(t)|$  are bounded. Assured then are the existence and uniqueness of the solutions  $x_\nu(t)$  for  $t = 0, 1, \dots$  when arbitrarily preassigned initial values  $x_\nu(0)$  are taken. Then  $\gamma$ ,

$$\gamma = \limsup_{t=\infty} \left\{ \sum_{\nu=1}^n |x_\nu(t)| \right\}^{1/t} = \limsup_{t=\infty} \left\{ \max_{\nu=1}^n |x_\nu(t)| \right\}^{1/t},$$

is always finite and is a measure of the order of magnitude of the integrals. When the coefficients are constants, with  $f_{\nu\mu}(t) = a_{\nu\mu}$ , then  $\gamma$  is equal to the absolute value of a root of the characteristic equation

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \varrho & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} - \varrho \end{vmatrix} = 0.$$

This holds also in the more general case when  $\lim_{t \rightarrow \infty} f_{\nu\mu}(t) = a_{\nu\mu}$ . No more than  $n$  values of  $\gamma$  are possible; when their multiplicities are appropriately counted the number of values of  $\gamma$  is precisely  $n$ . The properties of these numbers  $\gamma$  are investigated.

R. D. Carmichael (Urbana).

### Variationsrechnung:

● **Bolza, Oskar: Vorlesungen über Variationsrechnung.** Umgearb. u. stark verm. dtsh. Ausg. d. „Lectures on the calculus of variations“ desselb. Verf. Leipzig: K. F. Koehlers Antiquar. 1933. IX, 705 S. RM. 20.—.

**Morse, Marston: The calculus of variations in the large.** (Zürich, Sitzg. v. 5.—12. IX. 1932.) Verh. internat. Math.-Kongr. **1**, 173—188 (1932).

Während der letzten Jahre hat der Verf. eine topologische Theorie entwickelt, welche zuerst die stationären Punkte der Funktionen von mehreren Veränderlichen und nachher die Extremalen der Variationsaufgaben behandelte. Die Hauptfragen waren dabei: 1. Klassifikation der stationären Punkte einer Funktion von mehreren Veränderlichen bzw. der Extremalen einer Variationsaufgabe (Einführung der sog. „typischen Zahlen“) und 2. die Aufstellung der Beziehungen zwischen den topologischen Eigenschaften des Definitionsbereichs einer Funktion bzw. Funktional und den typischen Zahlen der zugehörigen stationären Punkte (Extremalen). Bei den Variationsaufgaben sind die Verhältnisse wesentlich komplizierter als im Fall der Funktionen endlich vieler Variablen. Die Hauptergebnisse weisen aber eine weitgehende Analogie auf. — Im vorliegenden Bericht behandelt der Verf. denjenigen Teil seiner Untersuchungen, der sich mit dem komplizierteren Fall der Variationsaufgaben befaßt. Es werden nacheinander: 1. die Definitionsgebiete eines Funktional topologisch charakterisiert; 2. die typischen Zahlen der kritischen Extremalmengen definiert; 3. die Beziehungen zwischen den typischen Zahlen der kritischen Extremalmengen und der topologischen Charakterisierung des Definitionsbereichs, die für den Fall von Funk-



tionen endlich vieler Variablen schon früher vom Verf. hergeleitet waren, auf den Fall von Variationsaufgaben verallgemeinert. — Es sei noch bemerkt, daß der Verf. diejenigen Charakteristiken der Variationsaufgaben betrachtet, die mit der Bettischen Gruppe des zugehörigen Definitionsbereichs in Zusammenhang stehen. *Schnirelmann*.

**Irrgang, Robert:** Ein singuläres bewegungsinvariantes Variationsproblem. *Math. Z.* **37**, 381—401 (1933).

Let  $\kappa$  and  $\tau$  denote curvature and torsion respectively of a curve as functions of the arc-length. The author investigates the variation problem  $\int_{s_0}^s f(\kappa, \tau) ds = \text{extremum}$  (the special case when  $f$  is independent of  $\tau$  was completely discussed by Radon). Introduce the coordinates  $x, y, z$  of the curve and the components  $t_1, t_2, t_3, m_1, m_2, m_3, b_1, b_2, b_3$  of the unit tangent, principal normal and binormal vectors as auxiliary functions. Write the equations  $x' = t_1, y' = t_2, z' = t_3$  and the nine equations comprised in the Frenet formulas. Then the proposed variation problem appears as a problem of Lagrange, involving fourteen functions related by twelve differential equations. The author develops the equations of Lagrange, the condition of Jacobi and the condition of Weierstrass in a compact and elegant form. He finds that the extremals depend only upon ten parameters instead of the expected twelve. In the last part of the paper, several interesting and instructive examples are discussed, including the case  $f = (\pi^2 \tau)^{1/6}$  in which the integral  $\int f(\kappa, \tau) ds$  is equal to the affine length.

*Tibor Radó* (Columbus, Ohio).

**Young, L. C.:** On approximation by polygons in the calculus of variations. *Proc. Roy. Soc. London A* **141**, 325—341 (1933).

The method developed in this paper depends upon a generalization of the notion of a curve and upon a corresponding generalization of curvilinear integration. The author gives a discussion of these notions both on account of their own interest and also with regard to applications in Calculus of variations. The results include certain theorems, in a very general form, concerned with the semi-continuity of the integrals of one-dimensional variation problems.

*Tibor Radó* (Columbus, Ohio).

**Graves, Lawrence M.:** A transformation of the problem of Lagrange in the calculus of variations. *Trans. Amer. Math. Soc.* **35**, 675—682 (1933).

Le problème transformé s'énonce ainsi: Rendre minimum l'intégrale

$$I = \int_{x_1}^{x_2} g[s, y_1(s), \dots, y_n(s), z_1(s), \dots, z_r(s)] ds$$

dans l'ensemble des courbes

$$y_i = y_i(x), \quad z_r = z_r(x), \quad (i = 1, 2, \dots, n; r = 1, 2, \dots, r)$$

telles que

$$y_i(x) = y_{i1} + \int_{x_1}^x \psi_i(x, s, y_1(s), \dots, y_n(s), z_1(s), \dots, z_r(s)) ds,$$

$$y_j(x_2) = y_{j2}; \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, p \leq n)$$

les fonctions  $g, \psi_i$  et les valeurs  $x_1, x_2, y_{i1}, y_{i2}$  étant données. L'auteur établit une règle analogue à celle des multiplicateurs de Lagrange et une condition analogue à celle de Weierstrass, puis retourne, par la transformation inverse, au problème de Lagrange ordinaire.

*Adolphe Szücs* (Budapest).

## Funktionentheorie:

**Estermann, Theodor:** Über die totale Variation einer stetigen Funktion und den Cauchyschen Integralsatz. *Math. Z.* **37**, 556—560 (1933).

Il s'agit une fois de plus du théorème de Cauchy pour un contour rectifiable et une fonction régulière à l'intérieur de ce contour et continue sur le contour. Des démonstrations ont été données par E. Kamke (ce Zbl. **4**, 247) et dans un cas particulier

par A. Denjoy (ce Zbl. 6, 62). La démonstration actuelle offre ceci d'intéressant qu'elle est le complément naturel de celle donnée par M. E. Goursat dans le cas où le contour satisfait à des conditions légèrement plus restrictives. La partie essentielle de la démonstration est un lemme qui établit l'existence d'un quadrillage de côté arbitrairement petit, chacune des droites de ce quadrillage ne coupant le contour qu'en un nombre fini de points.

E. Blanc (Poitiers).

**Kok, F. de:** Sur quelques propriétés d'une fonction à partie réelle positive. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 476—478 (1933).

Wenn  $f(x + iy)$  für  $x > 0$  regulär ist und einen positiven reellen Teil hat, so gilt

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{z - ti} + \frac{1}{1 + ti} \right) d\varphi(t) + \lambda z + \mu,$$

wo  $\varphi$  eine monotone Funktion von  $t$  ist. Es wird gezeigt: I. In jedem Punkt der imaginären Achse existiert für  $z \rightarrow \alpha i$ ,  $|\arg(z - \alpha i)| \leq k < \frac{\pi}{2}$  der Grenzwert

$$\lim(z - \alpha i)f(z) = \mu,$$

und zwar ist  $\mu = 0$  oder  $> 0$ , je nachdem  $\alpha$  eine Stetigkeits- oder Unstetigkeitsstelle von  $\varphi(t)$  ist. — Dieser Satz folgt übrigens aus einem älteren, entsprechenden Satz über Funktionen mit positivem reellen Teil im Einheitskreise (C. R. Acad. Sci., Paris 188, 1027—1029). — II. In jedem Randpunkt, wo  $\varphi'(t)$  endlich ist, was für fast alle  $t$  zutrifft, ist  $f(z) = O(\log \frac{1}{x})$ .

R. Nevanlinna (Helsinki).

**Strohhäcker, Erich:** Beitrag zur Theorie der schlichten Funktionen. Math. Z. 37, 356—380 (1933).

Es sei  $f(z) = z + \dots$  regulär im Kreise  $|z| < 1$  und bilde diesen schlicht auf ein konvexes Gebiet ab. Im ersten Teil der Arbeit werden die Ungleichungen

$$\Re \frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2}, \quad \Re z \frac{f'(z)}{f(z)} > \frac{1}{2} \quad (|z| < 1)$$

bewiesen, ferner der Ort von  $f'(z_0)$  für die genannte Klasse bestimmt,  $|z_0| < 1$ . Diese Resultate sind, wie der Verf. angibt, von A. Marx schon früher (vgl. dies. Zbl. 5, 109) auf andere Weise bewiesen worden. Im zweiten Teil wird ein Satz des Ref. über beliebige schlichte Abbildungen für die oben definierten konvexen wie folgt verschärft: Zwei Randpunkte, welche auf derselben den Nullpunkt enthaltenden Geraden liegen, können zu 0 nicht beide näher als  $\pi/4$  liegen. Szegő (Königsberg, Pr.).

**Ozaki, Shigeo:** Remarks on some coefficients of a Schlicht function. Sci. Rep. Tokyo Bunrika Daigaku A 1, 283—287 (1933).

In einer Arbeit des Ref. [Math. Ann. 100, 192 (1928)] ist eine elementare, auf dem Bieberbachschen Flächensatz beruhende Abschätzungsmethode der Koeffizienten einer schlichten Potenzreihe  $z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$ ,  $|z| < 1$ , benutzt worden, die von Grandjot herrührt. Verf. beweist in der vorliegenden Arbeit mittels dieser Methode:

$$|a_3| < 3\frac{1}{5}, \quad |a_4| < 4,546 \dots, \quad |a_5| < 6,701 \dots$$

Die erste Ungleichung ist auch von K. König (vgl. dies. Zbl. 1, 214) auf elementarem Wege bewiesen worden. Sie ist freilich schlechter als die (beste) Löwnersche Abschätzung  $|a_3| \leq 3$ . Szegő (Königsberg, Pr.).

**Grötzsch, Herbert:** Die Werte des Doppelverhältnisses bei schlichter konformer Abbildung. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. 14/15, 501—515 (1933).

Der schlichte Bereich  $B$  der  $z$ -Ebene, in dem vier Punkte  $z_1, z_2, z_3, z_4$  ausgezeichnet seien, werde allen möglichen schlichten Abbildungen  $w = f(z)$  unterworfen. Gefragt wird nach dem genauen Wertebereich des Doppelverhältnisses

$$\lambda = (f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)).$$

Antwort: Unter den Werten  $\omega(\lambda)$ , die durch Einsetzen von  $\lambda$  in die elliptische Modulfunktion entstehen, kann jedesmal einer derart ausgezeichnet werden, daß stetige



Abhängigkeit von  $f(z)$  zustande kommt. Diese Werte erfüllen dann eine abgeschlossene Kreisscheibe, die nur bei den starren Bereichen zu einem Punkt ausartet. Der Beweis stützt sich im wesentlichen auf die vom Verf. ausgebildete Flächenstreifenmethode.

K. Löwner (Prag).

**Sugawara, Masao:** On the so-called Kronecker's dream in youngdays. Proc. Phys.-Math. Soc. Jap., III. s. 15, 99—107 (1933).

Verf. untersucht zunächst die Teilungsgleichung der  $\wp$ -Funktion, d. h. das Polynom

$$\prod_{\substack{a_1, a_2 \bmod m \\ (a_1, a_2, m) = 1}}^* \left( x - \wp \left( \frac{a_1 w_1 + a_2 w_2}{m}; w_1, w_2 \right) \right),$$

wo  $m > 1$  eine natürliche Zahl ist und  $\prod^*$  bedeutet, daß von zwei Paaren  $a_1, a_2$  und  $-a_1, -a_2 \bmod m$  nur ein Exemplar auftritt. Der zweithöchste Koeffizient dieses Polynoms ist Null, während der dritte und vierte die Gestalt  $a g_2(w_1, w_2)$  bzw.  $b g_3(w_1, w_2)$  mit konstanten  $a$  und  $b$  hat. Durch Heranziehung der Heckschen Fourierentwicklung der  $\wp$ -Teilwerte gelingt es zu zeigen, daß  $a$  und  $b$  negative rationale Zahlen sind (vgl. auch Fricke, Die elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen, II, Teubner 1922, S. 247); beim Beweise werden nur die konstanten Glieder der Fourierentwicklung benutzt. Hieraus folgt durch Übergang zur Weberschen  $\tau$ -Funktion, daß die Teilwerte  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  dieser Funktion die absolute Invariante  $j(w_1, w_2)$  rational mit rationalen Koeffizienten darstellen. — Es sei nun  $\Omega$  ein imaginär-quadratischer Zahlkörper, der von den Körpern  $R(\sqrt{-1})$  und  $R(\sqrt{-3})$  verschieden ist. Dann sind die singulären Werte der  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$  die Strahlklasseninvarianten aller und nur der ganzen Ideale  $\mathfrak{m}$  aus  $\Omega$ , deren kleinstes positives ganzrationales Vielfaches  $m$  ist (Hasse, Neue Begründung der komplexen Multiplikation, J. reine angew. Math. 157, 115). Bezeichnet  $K_1^*$  eine Strahlklasse mod  $m$ ,  $K$  die gegebene absolute Idealklasse, so folgt nunmehr aus dem Verschiebungssatz der Klassenkörpertheorie (vgl. etwa die Ausarbeitung der Vorlesung von H. Hasse über Klassenkörpertheorie, § 11):

$$\Omega(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) = \Omega(j(K), \tau(K_1^*))$$

und ferner die Tatsache, daß jeder Strahlklassenkörper mod eines der oben genannten  $\mathfrak{m}$  Unterkörper dieses Körpers  $\Omega(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$  ist. Man erhält also sämtliche relativ Abelschen Oberkörper von  $\Omega$  in den Teilkörpern der Körper, die aus  $\Omega$  durch Adjunktion der sämtlichen Strahlklasseninvarianten mod  $m$  entstehen, wenn  $m$  alle natürlichen Zahlen durchläuft. Die weitergehende Behauptung des Verf., daß man zum gleichen Zwecke mit nur einer einzigen geeignet gewählten Strahlklasseninvariante auskommt, ist ungenügend und teilweise fehlerhaft begründet; es hat den Anschein, daß sich auf dem vom Verf. eingeschlagenen Wege ein strenger Beweis dieser Tatsache nicht ohne weiteres erbringen läßt.

Petersson (Hamburg).

**Bieberbach, Ludwig:** Beispiel zweier ganzer Funktionen zweier komplexer Variablen, welche eine schlichte volumtreue Abbildung des  $R_4$  auf einen Teil seiner selbst vermitteln. S.-B. preuß. Akad. Wiss. H. 14/15, 476—479 (1933).

Fatou a indiqué l'existence des couples de fonctions méromorphes (et même entières) de deux variables complexes qui ne s'approchent pas aussi près que l'on veut de tout couple de valeurs [voir C. R. Acad. Sci., Paris 175, 862—865 et 1030—1033 (1922)]. — L'auteur indique des couples de fonctions entières independantes qui donnent une représentation univalente (conservant, d'ailleurs, le volume) et ne s'approchant pas arbitrairement de tout couple de valeurs. — D'ailleurs déjà les couples de Fatou sont tels qu'une certaine univalence est observée. L'auteur démontre en effet, que tout couple de Fatou est tel, qu'il n'existe certainement pas deux points  $(x_1, y_1)$  et  $(x_2, y_2)$  (de  $R_4$ ) dont les voisinages soient représentés sur le voisinage du même point  $(\xi, \eta)$ . — Pour avoir son exemple l'auteur s'arrange de sorte que les fonctions du couple soient entières, et que leur Jacobien ne s'annule pas.

Mandelbrojt.

## **Wahrscheinlichkeitsrechnung, Statistik, Versicherungsmathematik:**

● Kolmogoroff, A.: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Erg. d. Math. u. ihrer Grenzgeb. Hrsg. v. d. Schriftleitung d. Zbl. f. Math. Bd. 2, H. 3.) Berlin: Julius Springer 1933. IV, 62 S. RM. 7.50.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung wird in größter Allgemeinheit lückenlos axiomatisch aufgebaut und erstmalig ganz systematisch und sehr naturgemäß in die abstrakte Maßtheorie eingeordnet. Das Axiomensystem ist wohl das denkbar einfachste. Zugrunde gelegt wird eine Menge  $E$  der „elementaren Ereignisse“, während die „zufälligen Ereignisse“ natürlich Teilmengen von  $E$  sind. Axiomatisiert wird der Begriff des zufälligen Ereignisses und seiner Wahrscheinlichkeit:  $E$  ist vorgegeben; ein System  $\mathfrak{F}$  von Teilmengen von  $E$  (die Elemente von  $\mathfrak{F}$  sind die zufälligen Ereignisse) heißt Wahrscheinlichkeitsfeld, wenn folgende Axiome erfüllt sind: I.  $\mathfrak{F}$  ist ein Mengenkörper. II.  $\mathfrak{F}$  enthält  $E$ . III. Jeder Menge  $A$  aus  $\mathfrak{F}$  ist eine nichtnegative reelle Zahl  $P(A)$  — die Wahrscheinlichkeit — zugeordnet. IV.  $P(E) = 1$ . V. Wenn  $A$  und  $B$  fremd sind („unvereinbare Ereignisse“), so gilt  $P(A) + P(B) = P(A + B)$ . VI. Für eine monoton abnehmende Folge  $\{A_n\}$  von Mengen aus  $\mathfrak{F}$  mit leerem Durchschnitt gilt  $\lim(A_n) = 0$ . Die Wahrscheinlichkeit ist also eine additive Mengenfunktion auf einem Mengenkörper. Wie die zahlenmäßige Zuordnung der Wahrscheinlichkeiten geschieht, ist nicht Angelegenheit der Axiomatik. Das Axiom VI folgt für endliche Wahrscheinlichkeitsfelder aus den übrigen; da in der Praxis immer nur endliche Felder vorliegen, kann es zu keiner Kollision mit der Beobachtung „zufälliger Prozesse“ führen. Darüber hinaus ist dieses Axiom allerdings nicht zwingend, wenn auch mehr als plausibel. Seine große Bedeutung liegt darin, daß es gestattet, den Bereich  $\mathfrak{F}$  der mit Wahrscheinlichkeiten bewerteten Mengen wesentlich zu erweitern. Auf dem kleinsten Borelschen Mengenkörper über  $\mathfrak{F}$  gibt es nämlich genau eine den Axiomen I—VI genügende Mengenfunktion, die für die Mengen von  $\mathfrak{F}$  mit der gegebenen Funktion  $P(A)$  übereinstimmt, und man kann somit gleich diesen Borelschen Körper der Betrachtung zugrunde legen. Mathematisch kommt also das Axiomensystem auf die Theorie der absolut additiven Mengenfunktionen, d. h. auf die abstrakte Maßtheorie hinaus, und die Eigenart der Wahrscheinlichkeitsrechnung innerhalb dieser Theorie ergibt sich dann durch weitere Spezialisierungen (etwa durch Einführung der Unabhängigkeit). Die Abrundung und Einfachheit der Theorie ist somit wesentlich dem Axiom VI zu verdanken. (Verf. legt der Betrachtung die Borelsche Maßtheorie zugrunde; es sei dazu bemerkt, daß man ebenso auch die Lebesguesche Theorie benutzen kann, wenn man noch definiert, daß jede Teilmenge einer Menge mit der Wahrscheinlichkeit Null ebenfalls die Wahrscheinlichkeit Null besitzt.) — Das erste Kapitel bringt die Theorie der endlichen Felder: bedingte Wahrscheinlichkeit, Unabhängigkeit, Satz von Bayes. Das zweite Kapitel ist dem Axiom VI gewidmet. Das dritte bringt in größter Allgemeinheit die „zufälligen Größen“ — es sind das die in bezug auf  $P(A)$  meßbaren Funktionen. Bemerkenswert ist hier die große Allgemeinheit: es werden Wahrscheinlichkeiten auch in unendlich dimensionalen Räumen beliebiger Mächtigkeit behandelt. Das vierte Kapitel behandelt die mathematischen Erwartungen als abstrakte Lebesguesche Integrale und die Tschebycheffsche Ungleichung, das fünfte die bedingten Wahrscheinlichkeiten und Erwartungen. Im letzten Kapitel wird der Begriff der Unabhängigkeit entwickelt, und als Anwendung das Gesetz der großen Zahlen. Als Anhang ein Satz über Fälle, in denen die Wahrscheinlichkeiten nur Null oder Eins sein können, wobei das Beispiel der Konvergenz einer Reihe unabhängiger zufälliger Größen ein Spezialfall ist. — Die Darstellung ist sehr präzise, aber etwas knapp, und wendet sich an Leser, denen die Materie nicht fremd ist. Die Maßtheorie wird vorausgesetzt.

Willy Feller (Kiel).

● Khintchine, A.: Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. (Erg. d. Math. u. ihrer Grenzgeb. Hrsg. v. d. Schriftleitung d. Zbl. f. Math. Bd. 2, H. 4.) Berlin: Julius Springer 1933. IV, 77 S. RM. 9.60.

Die asymptotische Wahrscheinlichkeitsrechnung besteht — wie in der Vorrede des Büchleins ausgeführt wird — aus einer Reihe von ziemlich isoliert dastehenden Sätzen, die durch keinen allgemeinen Standpunkt verbunden sind. Erst in neueren Arbeiten wurden vielversprechende Ansätze zur Vereinheitlichung gewonnen, die aber noch längst nicht das Ganze umfassen. So schien es wenig bedeutungsvoll, in enzyklopädischer Vollständigkeit die einzelnen Grenzwertsätze aufzuzählen, und Verf. stellte sich daher die Aufgabe, nur diejenigen Teile des Gesamtgebietes darzustellen, bei denen eine innere Einheitlichkeit erkennbar ist und die einigermaßen die Hoffnung rechtfertigen, daß sie dem ganzen Gebiete das Gepräge geben werden. Demnach wurden nicht nur einige wichtige Sätze geopfert, sondern Verf. verzichtete auch auf die größte mögliche Allgemeinheit, um den eigentlichen Gedankengang nicht durch zuviel Rechnungen zu verdunkeln. Dieser Verzicht trägt viel zur Abrundung und Lesbarkeit des Werkes bei, und die Einheitlichkeit auch der Methoden bei den verschiedenen behandelten Gegenständen ist überraschend groß. Allgemein ist noch zu erwähnen, daß die Darstellung (auch der bereits „klassischen“ Sätze) vielfach neu ist und außer auf den Verf. vor allem auf Kolmogoroff und eine noch nicht erschienene Arbeit von Petrowsky zurückgeht. Das



Buch ist übrigens nicht als eine erste Einführung in das Gebiet gedacht. — Im ersten Kapitel wird der Laplace-Ljapounoffsche Grenzwertsatz entwickelt und seine zentrale Bedeutung hervorgehoben. Die Beweismethode enthält bereits den Grundgedanken der späteren Beweise. Die Formulierung der Bedingungen ist der Lindebergschen verwandt. Bezeichnet  $\Phi(x)$  die Gauss-Laplacesche Funktion, so genügt  $\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{z}}\right)$  der Gleichung  $2\Phi_z = \Phi_{zz}$ . Für diese Gleichung wird eine obere (bzw. untere) Funktion nach Perron eingeführt:  $V(x, z) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{z}}\right) + \varepsilon$ .

Die Verteilungsfunktion für die Summe der  $k$  ersten zufälligen Veränderlichen genügt einer rekursorischen Gleichung, während  $V(x, z + b_k)$  ( $b_k$  die zweiten Momente) der entsprechenden Ungleichung genügt. Auf diese Weise ergibt sich durch Rekursion die gesuchte Abschätzung für die Verteilungsfunktion. Dieser Beweis funktioniert auch in mehr Dimensionen. Der Laplacesche Satz wird nun als Lösung des einfachsten linearen Diffusionsprozesses mit schrittweiser Änderung aufgefaßt. Es liegt dann nahe, den Änderungsprozeß als stetig vorauszusetzen: man hat damit den einfachsten stochastischen Prozeß, und die Wahrscheinlichkeitsverteilung wird wieder durch das Laplacesche Gesetz geregelt, das nunmehr ein eigentliches Verteilungsgesetz ist und nicht mehr nur eine Grenzfunktion von solchen. — Im zweiten Kapitel wird der Poissonsche Grenzwertsatz und seine Verallgemeinerung bewiesen und der Zusammenhang mit dem allgemeinen unstetigen stochastischen Prozeß erörtert. Der Kolmogoroffsche Satz über die allgemeine Form des homogenen stochastischen Prozesses (dies. Zbl. 4, 408) wird nicht ausgeführt. Das dritte Kapitel ist den Diffusions- oder Irrfahrtproblemen in größter Allgemeinheit gewidmet. Die Verteilungsfunktion nähert sich der Lösung einer Randwertaufgabe einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, und die Methode ist eine Verallgemeinerung der im ersten Kapitel angewandten, wie ja der ganze Problemkreis eine Verallgemeinerung des dort behandelten ist. (Der von Petrowsky herrührende Hauptsatz dieses Kapitels ist in dieser Allgemeinheit neu.) Im vierten Kapitel wird das Problem noch weiter verallgemeinert, indem vorausgesetzt wird, daß die (zweidimensionale) Irrfahrt in bezug auf eine Koordinate immer in einer bestimmten Richtung vor sich geht. Dieses Problem bedarf einer neuen Behandlung, weil sich der Typus der erwähnten Differentialgleichung ändert. Ähnlich wird eine Verallgemeinerung des Laplace-Ljapounoffschen Satzes (dies. Zbl. 3, 357, Kolmogoroff) behandelt. Im letzten Kapitel wird der Satz vom iterierten Logarithmus behandelt, sowie die entsprechende Abschätzung für den stetigen stochastischen Prozeß. *Willy Feller*.

**Dörge, Karl: Eine Axiomatisierung der von Misesschen Wahrscheinlichkeitstheorie.**

Jber. Deutsch. Math.-Verein. 43, 39—47 (1933).

Abdruck eines Vortrages, der die Grundgedanken der in der Math. Z. 32 veröffentlichten Axiomatisierung der v. Misesschen Wahrscheinlichkeitsrechnung durch den Verf. zusammenstellt und mit einer kurzen Stellungnahme zur Theorie von E. Tornier schließt.

*R. Iglisch* (Aachen).

**Wintner, Aurel: On the stable distribution laws.** Amer. J. Math. 55, 335—339 (1933).

Eine vom Parameter  $p$  abhängende Klasse von Verteilungsfunktionen  $\sigma(x/p)$  wird stabil genannt, wenn die Summe von zwei gegenseitig unabhängigen zufälligen Variablen, deren jede einem Verteilungsgesetz der gegebenen Klasse unterliegt, dieselbe Eigenschaft besitzt. Es wird bewiesen, daß nur zwei in diesem Sinne stabile Klassen mit endlichen Streuungen existieren, nämlich erstens die Gaußschen Verteilungen und zweitens die triviale Verteilung  $\sigma(x) = 0, \frac{1}{2}, 1$  für  $x <, =, > 0$ , die für sich allein eine Klasse bildet und die Verf. als Diracsche Verteilung bezeichnet. Das Neue ist dabei, daß a priori keinerlei Stetigkeitsvoraussetzungen gemacht werden. Zum Schluß wird gezeigt, daß die Gleichverteilung im Intervall  $(0, 1)$  als Limes einer modulo 1 reduzierten Gaußschen Verteilung aufgefaßt werden kann, unter der Annahme, daß die Streuung unendlich groß wird.

*A. Khintchine* (Moskau).

**Pankraz, Otomar: Zur Grundgleichung für den zeitlichen Zerfall der statistischen Kollektivs.** Aktuár. Vědy 4, 32—59 (1933).

Sei eine Gesamtheit (Kollektiv) von Individuen zu untersuchen, deren jedes durch  $n$  Merkmale charakterisiert ist, von denen es zu jeder Zeit  $t$  ein einziges verlieren (=Ausscheiden aus der Gesamtheit) bzw. wiedergewinnen (=Wiedereintritt in die Gesamtheit) kann. Es sei  $l(t, \tau)$  ( $0 \leq \tau \leq t$ ) die Anzahl derjenigen Individuen, die im Augenblick  $t$  zu der Gesamtheit gehören und außerdem bis zur Zeit  $t$  insgesamt eine Zeitspanne  $\tau$  der Gesamtheit angehört haben.  $l(0, 0) = l_0(0) =$  Anfangszahl der In-

dividuen in der Gesamtheit. Es sei  $\eta_i(t, \tau)$  die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Individuum, das insgesamt die Zeit  $\tau$  in der Gesamtheit verbracht hatte, zur Zeit  $t$  infolge Verlusts des Merkmals  $i$  ausscheidet.  $\varrho_i(t, \xi)$  sei die Wahrscheinlichkeit, daß ein Individuum, das zum letzten Male zur Zeit  $\xi < t$  durch Verlust des Merkmals  $i$  ausgeschieden ist, dieses Merkmal  $i$  zur Zeit  $t$  wiedererwirbt.  $p_i(t, \zeta)$  sei die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Individuum, das zur Zeit  $\zeta < t$  das Merkmal  $i$  verloren hat, bis zur Zeit  $t$  hin ununterbrochen ohne dieses Merkmal ist. — Eine Gesamtheit heißt abgeschlossen, wenn als Individuen nur solche betrachtet werden, die zur Zeit  $t = 0$  der Gesamtheit angehörten [ $l(t, 0) \equiv 0$  für  $0 < t \leq 1$ ]; sonst heißt die Gesamtheit offen. Hängt  $l(t, \tau)$  von der Variablen  $\tau$  nicht ab, so heißt das Kollektiv eindimensional, sonst zweidimensional. Für das eindimensionale Problem bei abgeschlossenen Kollektivs wird für die Anzahl  $l(t)$  die Schoenbaumsche Integrodifferentialgleichung abgeleitet:

$$\frac{dl(t)}{dt} = -l(t) \cdot \sum_1^n \eta_i(t) + \int_0^t \sum_1^n p_i(t, \zeta) \varrho_i(t, \zeta) \eta_i(\zeta) l(\zeta) d\zeta.$$

An deren Stelle tritt im allgemeinen Fall des offenen zweidimensionalen Kollektivs die partielle Integrodifferentialgleichung:

$$\frac{dl(t, \tau)}{\partial t} + \frac{\partial l(t, \tau)}{\partial \tau} = -l(t, \tau) \cdot \sum_1^n \eta_i(t, \tau) + \int_\tau^t \sum_1^n \eta_i(t, \tau) p_i(t, \zeta) \varrho_i(t, \zeta) l(\zeta, \tau) d\zeta.$$

Letztere Gleichung wird in zwei Weisen durch sukzessive Approximation gelöst mit der Anfangsbedingung:  $l(t, 0) = l_0(t)$ . Die auftretenden Funktionen werden dabei im wesentlichen als glatt vorausgesetzt. Ob die erhaltenen Lösungen identisch oder überhaupt die einzigen sind, wird nicht untersucht. *R. Iglisch (Aachen).*

**Mises, R. v.:** Über Zahlenfolgen, die ein kollektiv-ähnliches Verhalten zeigen. *Math. Ann.* 108, 757—772 (1933).

In verblüffend einfacher und einheitlicher Weise gewinnt Verf. eine Reihe von Beispielen für Zahlenfolgen, die entweder keine oder eine in bestimmter Weise beschränkte Regellosigkeit (im Sinne der bekannten Theorie des Verf.) aufweisen. Ausgangspunkt ist der einfache Hilfssatz: Besitzt in einer Folge  $F$  das Zeichen  $A$  an den Stellen  $n = n_1, n_2, n_3 \dots$  die relativen Häufigkeiten  $p_1, p_2, p_3 \dots$  und gilt

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} p_\nu = p, \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{n_\nu - n_{\nu-1}}{n_{\nu-1}} = 0, \quad n_\nu \rightarrow \infty,$$

so besitzt  $A$  die Grenzhäufigkeit  $p$ . — Es werden Folgen mit vorgegebenen arithmetischen und geometrischen (auch mehrdimensionalen) Verteilungen angegeben sowie Folgen, die die Stellung des Bernoullischen Gesetzes beleuchten, z. B. Zahlenfolgen, bei denen trotz Existenz der Grenzwerte der relativen Häufigkeiten das B. G. nicht gilt, und solche Folgen, die genau das vom B. G. geforderte Verhalten zeigen. *Iglisch.*

**Cantelli, F. P.:** Considerazioni sulla legge uniforme dei grandi numeri e sulla generalizzazione di un fondamentale teorema del sig. Paul Lévy. *Giorn. Ist. Ital. Attuari* 4, 327—350 (1933).

Es sei  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  eine Folge aleatorischer, unabhängiger Größen mit den Erwartungswerten  $E(X_i) = 0$ ; ferner sei:  $Y_n = X_1 + \dots + X_n$  und  $A_i = E(Y_i^2)$ . Der Verf. beweist, daß unter gewissen Bedingungen die Wahrscheinlichkeit des Eintreffens für unendlich viele  $i$  der Ungleichung

$$|Y_i| > \sqrt{2A_i} \sqrt{\log \log A_i} + c \log \log \log A_i$$

den Wert 0 bzw. 1 habe, falls  $c > 3/2$  bzw.  $c \leq 1/2$  ist. — Es handelt sich also um eine Erweiterung des von P. Lévy [*Bull. Sci. math.* (2) 55 (1931); dies Zbl. 2, 43] für den Bernoullischen Fall bewiesenen Theorems analog der von Kolmogoroff gegebenen Erweiterung hinsichtlich des Theorems von Khintchine, welches in dem Theorem von Lévy eine Verschärfung (durch das Hinzufügen des Gliedes  $\log \log \log$ ) gefunden hat. — Der Beweis gelingt dem Verf., indem er durch eine genaue Analyse zeigt, daß die von P. Lévy verwendeten 5 Hilfssätze auch unter allgemeineren Voraussetzungen



gültig sind; insbesondere ist die Erweiterung des Hilfssatzes IV durch Heranziehung eines Ergebnisses von Liapounoff bemerkenswert. *Bruno de Finetti* (Trieste).

**Cámara, S.: Stochastische Beziehungen zwischen zufälligen Eigenschaften.** *Rev. mat. hisp.-amer.*, II. s. 8, 58—77 (1933) [Spanisch].

Mit Benützung der in der englischen Statistik üblichen Bezeichnung für die Maße der statistischen Massen wird die Wahrscheinlichkeit einer durch die Eigenschaft  $b$  gekennzeichneten Teilmasse  $p_b$  definiert; für die zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit zweier Eigenschaften  $b, d$  wird die Bezeichnung  $p_{bd}$  herangezogen. Für die Wahrscheinlichkeit des Auftretens mindestens eines Merkmales von zweien  $p_{(b+d)}$  gilt das „Theorem der totalen Wahrscheinlichkeiten“:  $p_{(b+d)} = p_b + p_d - p_{bd}$ . — Als „gebundene Wahrscheinlichkeit“  $p_b^d$  einer Eigenschaft  $b$  an eine andere  $d$  wird die Wahrscheinlichkeit verstanden, daß ein Element von der Eigenschaft  $d$  auch die Eigenschaft  $b$  besitze. Als „Theorem der zusammengesetzten Wahrscheinlichkeit“ wird der Satz

$$p_{bd} = p_b p_b^d = p_d \cdot p_d^b$$

bezeichnet. Das Verhältnis der stochastischen Abhängigkeit  $k$  wird durch

$$k = \frac{p_{bd}}{p_b p_d} = \frac{p_b^d}{p_d} = \frac{p_d^b}{p_b}$$

definiert. Unabhängige Eigenschaften sind durch  $k = 1$  charakterisiert. Unverträgliche Eigenschaften kennzeichnet  $k = 0$ . Stochastische Attraktion besteht im Falle  $k > 1$ , stochastische Repulsion im Falle  $k < 1$ . Die Untersuchung der Veränderung von  $k$  bei ungeändertem Umfang der Gesamtmasse und ungeändertem  $(b)$  und  $(a)$ , aber veränderlichem  $(b, d)$  führt zur Einführung der Begriffe „teilweise stramme Beziehung“ von  $d$  auf  $b$ , „vollständige stramme Beziehung“ der Eigenschaften  $b$  und  $d$ . Im Anschluß an diese Ausführungen werden noch andere Maße des stochastischen Zusammenhanges in Vorschlag gebracht und theoretisch, sowie an konkreten Beispielen, untersucht. *F. Knoll* (Wien).

**Kolmogoroff, A., und M. Leontowitsch: Zur Berechnung der mittleren Brownschen Fläche.** *Physik. Z. Sowjetunion* 4, 1—13 (1933).

Das Ziel der Abhandlung ist, die erwartungsmäßige Größe  $F$  der Fläche zu berechnen, welche die Projektion eines kugelförmigen in Brownscher Bewegung begriffenen Teilchens auf eine Ebene während einer gegebenen Zeitstrecke  $t$  beschreibt, wobei die etwaigen mehrmals beschriebenen Flächenteile nur einmal gezählt werden sollen. Man sieht leicht ein, daß der gesuchte Erwartungswert sich in der Form  $E(F) = \iint W(x, y; t) dx dy$  darstellen läßt, wo  $W(x, y; t)$  die Wahrscheinlichkeit dafür bedeutet, daß die oben erwähnte Projektion, deren Mittelpunkt sich zur Zeit  $t = 0$  in  $(0, 0)$  befindet, im Laufe der Zeitstrecke  $t$  mindestens einmal den Punkt  $(x, y)$  bedeckt (der Halbmesser des Teilchens wird dabei zur Längeneinheit gewählt). Es wird gezeigt, daß  $W(x, y; t)$  einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung genügt, welche in Polarkoordinaten die Form

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r}$$

mit den Randbedingungen  $W(1, t) = 1$ ,  $W(\infty, t) = 0$ ,  $W(r, 0) = 0$  für  $r > 1$  annimmt, wenn die Zeiteinheit so gewählt wird, daß der Diffusionskoeffizient den Wert 1 erhält. Für  $E(F)$  finden die Verf. auf Grund dieser Randwertaufgabe einen Integralausdruck mittels Hankelscher Funktionen, dessen asymptotische Abschätzung für große  $t$

$$E(F) \sim \frac{4\pi t}{\ln \frac{\pi t}{\gamma^2}}, \quad \gamma = e^C, \quad C = \text{Eulersche Konstante}$$

ergibt. Es werden auch genauere Näherungsformeln für  $E(F)$  angegeben.

Zwei sinnstörende Druckfehler mögen noch berichtet werden: auf S. 3 Formel (13) ist  $[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]^2$  statt  $[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2]$  zu lesen; auf S. 3, Zeile 2 von unten muß  $\frac{P(x, y; t + \tau) - P(x, y; t)}{\tau}$  statt  $\frac{P(x, y; t + \tau)}{\tau}$  stehen. *A. Khintchine* (Moskau).

**Okaya, Tokiharu:** Sur les fonctions complémentaires des fonctions caractéristiques de l'intégrale de probabilité et la distribution de la température dans un corps homogène. Jap. J. Physics 8, 115—149 (1933).

Betrachtungen über Funktionen, die analog den in der vorhergegangenen Studie des Verf. „Sur des applications des fonctions caractéristiques de l'intégrale de probabilité“ [Ibid. 8, 59—83 (1933); dies. Zbl. 6, 264] untersuchten konstruiert sind; Anwendung derselben auf das im Titel bezeichnete Problem. *Bruno de Finetti*.

**Khintchine, A.:** Über die mittlere Dauer des Stillstandes von Maschinen. Rec. math. Moscou 40, Nr 2, 119—122 (1933) [Russisch].

In der vorliegenden Arbeit wird folgende Frage gelöst. — Eine bestimmte Anzahl von Maschinen wird der Beobachtung eines Arbeiters anvertraut. Jede Maschine kommt von Zeit zu Zeit zum Stillstande und muß mehr oder weniger remontiert werden. Die Momente der Stillstände sind zufallsmäßig in der Zeit verteilt, und die Dauer der Reparatur kann verschieden ausfallen. Gesucht wird die mittlere Wartezeit, d. h. die mittlere Größe der Zeitdauer von dem Moment des Stillstandes an bis zum Beginn der Reparatur. *Autoreferat*.

**O'Toole, A. L.:** A method of determining the constants in the bimodal fourth degree exponential function. Ann. math. Statist. 4, 79—93 (1933).

The frequency function in question is at once reduced to the form

$$y = k e^{-a^2(x^2 + px^2 + qx)}, \quad a \neq 0$$

Then three special types are considered: In Type I,  $p = q = 0$ , in Type II,  $q = 0$ ,  $p = -2b$ ,  $b > 0$ ; in Type III,  $p = 0$ . The general case is called Type IV. — In a present paper the author develops a practical method of determining the numerical values of parameters for Type IV. The solution involves moment coefficients of order as high as 8. The numerical value of the integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2(x^2 + px^2 + qx)} dx$$

has to be found by mechanical quadrature. The author applied the method to an actual bimodal distribution. *H. L. Rietz*.

**Steffensen, J. F.:** On the definition of the central factorial. J. Inst. Actuar. 64, 165—168 (1933).

In der Abhandlung von Aitken (Proc. Roy. Soc. Edinburgh 53, 54; dies. Zbl. 6, 215) wird die Bezeichnung „mean central factorial“ vorgeschlagen anstatt die Steffensensche „central factorial“. Verf. entwickelt hier, wie die ganze Natur der Interpolationsrechnung nach seiner Ansicht die von ihm gewählte Bezeichnung notwendig macht. *Burrau* (Kopenhagen).

**Galvani, L.:** Punti di contatto e scambi di concetti tra la statistica e la matematica. Giorn. Ist. Ital. Attuari 4, 402—414 (1933).

**Galvani, Luigi:** Sulla determinazione del centro di gravità e del centro mediano di una popolazione, con applicazioni alla popolazione italiana censita il 1° dicembre 1921. Metron 11, Nr 1, 17—47 (1933).

**Roy, René:** La demande dans ses rapports avec la répartition des revenus. Economica 1, 265—273 (1933).

Aus dem Paretoschen Einkommenverteilungsgesetz werden Folgerungen über den Verlauf von Nachfragekurven gezogen. *W. Fenchel* (Kopenhagen).

**Tedeschi, B.:** Riserva matematica, corso dei titoli e reddito effettivo dei capitali. Giorn. Ist. Ital. Attuari 4, 425—444 (1933).

**Mazzoni, P.:** Un metodo di caricamento industriale dei premi. Giorn. Ist. Ital. Attuari 4, 369—401 (1933).

Si dimostra la possibilità di costruire un sistema di tariffe, stabilendo dei carichi industriali dei premi con criteri razionali, tenendo conto degli scarti atten-



dibili tra la mortalità effettiva degli assicurati di una Compagnia e la mortalità teorica.

*Autoreferat.*

**Borch, Fredrik:** Betrachtungen über die Darstellung von abgekürzten Leibrenten mittels Zeitrenten. Skand. Aktuarie Tidskr. 16, 73—93 (1933).

Aus dem Ansatz  $\bar{a}_{x:n} = \int_0^n \frac{l_{x+t}}{l_x} e^{-\delta t} dt = \frac{l_{x+\theta}}{l_x} \cdot \bar{a}_{\bar{n}}$  und einer bekannten Hölder-

Jensenschen Ungleichung für konvexe bzw. konkave Funktionen wird die Ungleichung  $\bar{a}_{x:n} \geq \frac{l_{x+\bar{\theta}n}}{l_x} \bar{a}_{\bar{n}}$ , mit  $\bar{\theta} = \frac{1}{\delta} \left(1 - n \frac{v^n}{\bar{a}_{\bar{n}}}\right)$  hergeleitet, in welcher das Zeichen  $>$  bzw.  $<$  bzw.  $=$  gilt, wenn  $l_{x+t}$  für  $0 < t < n$  konvex bzw. konkav bzw. linear verläuft. Da für die meisten Absterbeordnungen die Funktion  $l_x$  in einem sehr großen Intervall konkav ist, ergibt sich daraus eine obere Abschätzung der Leibrentenwerte durch Zeitrenten, welche für nicht sehr lange Dauern auch gut brauchbare Näherungswerte liefert. Für die näherungsweise Berechnung der Leibrenten durch Zeitrenten wird noch das folgende Verfahren angegeben:  $R(i) = \frac{a_{x:n}}{a_{\bar{n}}}$  wird in eine Potenzreihe nach dem Zinsfuß  $i$  entwickelt und auf diese Weise die Näherung

$$R(i) \approx R_1(i) = \frac{\sum_{t=1}^n l_{x+t}}{n \cdot l_x} \cdot \left[ 1 + i \left( \frac{n+1}{2} - \frac{\sum_{t=1}^n t l_{x+t}}{\sum_{t=1}^n l_{x+t}} \right) \right]$$

gefunden, welche, wie an Beispielen gezeigt wird, sehr gut ist. *Birnbaum* (Lwow).

**Jecklin, Heinrich:** Beitrag zur praktischen Berechnung von Nettoformeln der Sterberenten-Versicherung. Versicherungsarch. 4, 185—194 (1933).

**Wolff, Georg:** Die Lebenserwartung des Menschen. Naturwiss. 21, 585—589 (1933).

## Geometrie.

**Radziševskij, L.:** Sur la question des formes d'expression d'une géométrie purement abstraite. Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 6, 809—816 (1933) [Russisch].

La Note contient une simple énumération du contenu d'un mémoire, qui va être publié. Le thème principal du mémoire est l'examen de la représentation de la géométrie euclidienne plane sur l'ensemble des expressions  $\xi \equiv K I_1 + 2 L I_2 + 2 M I_3 + N$  où  $K, L, M, N$  sont des nombres réels et  $I_n$  — des symboles indéterminés. En introduisant des points  $(a, b)$  d'un plan auxiliaire  $[a = -L:K, b = -M:K]$ , l'auteur appelle l'expression  $\xi$  une „droite“ si le point  $(ab)$  appartient à une droite fixe du plan. L'ensemble des „droites“ est un „plan“, un couple de „droites“ est un „point“ etc. L'introduction de la métrique. Les différentes représentations pour les sens particuliers de  $I_n$ . L'application à la construction des courbes bicirculaires et leurs tangentes.

*S. Finikoff* (Moscou).

**Thomsen, G.:** Zum geometrischen Spiegelungskalkül. Math. Z. 37, 561—565 (1933).

Verf. gibt im Anschluß an seine Arbeit „Über einen neuen Zweig geometrischer Axiomatik . . .“ [Math. Z. 34 (1932); siehe dies. Zbl. 3, 408] zwei Literaturverweise und macht einige prinzipielle Bemerkungen über trivialisierende Verfahren zur Behandlung elementargeometrischer Aufgaben, d. h. solcher Verfahren, die nach einer allgemein festgelegten Methode jede Aufgabe in endlich vielen Schritten zu lösen gestatten. Das einzige bis jetzt brauchbare derartige Verfahren ist die Methode der analytischen Geometrie, das sich theoretisch auch Schritt für Schritt auf Grund der Hilbertschen Streckenrechnung ins Zeichnerische übertragen läßt. Möglicherweise liefert der Ausbau des „Spiegelungskalküls“ ein anderes brauchbares trivialisierendes Verfahren.

*R. Moufang* (Frankfurt a. M.).

**Haviland, E. K.:** On the addition of convex curves in Bohr's theory of Dirichlet series. Amer. J. Math. 55, 332—334 (1933).

H. Bohr hat als Hilfsmittel für die Untersuchung der Werteverteilung von Dirichletschen Reihen die Addition von konvexen Kurven eingeführt und gemeinsam mit Jessen [Danske Vid. Selsk. Skr. (8) 12, 326—405 (1929)] eingehend untersucht. Die Summe von endlich vielen konvexen Kurven  $C_v$  ist entweder ein konvexer Bereich oder ein Ringbereich, der von zwei konvexen Kurven begrenzt wird. Der Verf. bemerkt, daß dieser konvexe Bereich bzw. der vom äußeren Rand des Ringes begrenzte Bereich durch Addition im Brunn-Minkowskischen Sinne aus den von den  $C_v$  begrenzten Bereichen entsteht. Diese Bemerkung ermöglicht einige Ergebnisse von Bohr bzw. Bohr und Jessen unmittelbar aus Brunn-Minkowskischen Sätzen zu entnehmen.

W. Fenchel (Kopenhagen).

**Sz. Nagy, Julius v.:** Über die Ungleichungen für die Ordnung der ebenen Kurven vom Maximalklassenindex. Math. Z. 37, 493—513 (1933).

Als (geometrische) Klasse (Realitätsklasse) bzw. als Klassenindex einer reellen, ebenen Kurve bezeichnet man die maximale bzw. die minimale Anzahl von (reellen) Tangenten, welche von einem Punkte der (projektiven) Ebene an die Kurve gezogen werden können. Der größtmögliche Klassenindex bei den Kurven  $n$ -ter Klasse ist  $(n - 2)$ ; eine Kurve  $n$ -ter Klasse mit diesem Klassenindex  $(n - 2)$  heißt vom Maximalklassenindex. Die zu Klasse und Klassenindex dualen Begriffe sind die der (geometrischen) Ordnung und des Index. (Kurve = eindeutiges, stetiges Kreisbild, welches stetige Tangente besitzt und als Summe von endlich vielen Konvexbogen darstellbar ist.) Man betrachte eine Kurve  $n$ -ter Klasse vom Maximalklassenindex, welche  $w$  Wendepunkte,  $r$  Spitzen erster Art und  $t$  Doppeltangenten besitzt; andere Punkt- und Tangensingularitäten als die erwähnten können nicht auftreten. Wie früher vom Verf. bewiesen wurde [vgl. dies. Zbl. 3, 359; Math. Z. 35, 80—92 (1932) und die Zitate in dieser Arbeit], ist  $0 \leq w \leq 1$ ,  $r = n - 2 + 2p$ ,  $t = \binom{n-1}{2} - w - p$ , wo  $p$  das geometrische Geschlecht der betrachteten Kurve bedeutet. In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß  $M = n(n-1) - 2t - 3w$  das Maximum der geometrischen Ordnung ist, welches bei einer Kurve  $n$ -ter Klasse vom Maximalindex auftreten kann. Dieses Maximum ist also gleich der algebraischen Ordnung einer algebraischen Kurve von  $n$ -ter algebraischer Klasse mit dem algebraischen Geschlechte  $p$ , mit  $w$  Wendepunkten usw. (Daß diese Ordnung  $M$  auch wirklich erreicht wird, war schon früher vom Verf. festgestellt worden.) Ferner wird gezeigt: Für algebraische Kurven vom Maximalklassenindex sind geometrisches und algebraisches Geschlecht einander gleich; stimmen auch die geometrische und die algebraische Ordnung einer solchen Kurve überein, so ist sie algebraisch reduzibel dann und nur dann, wenn sie auch geometrisch reduzibel ist.

Haupt (Erlangen).

**Haupt, Otto:** Über Raumbogen dritter Ordnung, welche die sphärische Ordnung fünf besitzen. Math. Z. 37, 589—593 (1933).

Die lineare bzw. sphärische Ordnung eines Raumbogens ist die Maximalanzahl der gemeinsamen Punkte des Bogens mit einer beliebigen Ebene bzw. Kugel. Jeder Raumbogen der linearen Ordnung drei, der gleichzeitig von höchstens der sphärischen Ordnung fünf ist, läßt sich aus einer beschränkten Anzahl von Bogen der sphärischen Ordnung vier darstellen. Es gibt im euklidischen Raume  $R_3$  algebraische Raumbogen der linearen Ordnung drei, welche von höchstens der sphärischen Ordnung fünf sind.

Sz. Nagy (Szeged).

**Küneth, H.:** Der Schwerpunkt, die Eulersche Gerade und der Feuerbachsche Kreis in der absoluten Geometrie. Jber. Deutsch. Math.-Verein. 43, 65—77 (1933).

Gegeben ein Dreieck und ein durch keine Ecke gehender Kegelschnitt. Die beiden auf jeder Dreiecksseite liegenden Ecken und die Schnittpunkte der Seite mit dem Kegelschnitt bestimmen auf ihr eine Involution. Über die 6 Doppelpunkte dieser 3 Invo-



lutionen wird nun auf einfache Weise der Satz bewiesen: Sie sind die Ecken eines vollständigen Vierseits. Dieser Satz gibt mannigfache Aufschlüsse über die im Titel der Arbeit genannten Begriffe. *Cohn-Vossen* (Locarno).

**Lovett, E. O.:** Sur certaines courbes qui généralisent les coniques. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 544—547 (1933).

**Mentré, Paul, et O. Rozet:** Sur certaines surfaces tétraédrales. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, III. s. 18, H. 2, 1—13 (1933).

Beweise der in einer gleichbetitelten Note (C. R. Acad. Sci., Paris 195, 452; dies. Zbl. 5, 117) angezeigten Sätze. *Čech* (Brno).

**Lotze, Alfred:** Zur vektoriellen Begründung der sphärischen Trigonometrie. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 43, 81—86 (1933).

Der Sinus-Cosinus-Satz der sphärischen Trigonometrie kann bekanntlich allein aus dem Cosinussatz und dem Sinussatz abgeleitet werden. [Z. B. E. Study, Sphärische Trigonometrie . . ., Abh. sächs. Akad. Wiss. 20, 124—127 (1893)]. Nun sind Sinus- und Cosinussatz unmittelbare Folgerungen aus einfachen Vektoridentitäten. (Z. B. E. Study, Einleitung in die Theorie der Invarianten . . ., Braunschweig 1923, § 4). Der Verf. zeigt, daß auch der Sinus-Cosinus-Satz unmittelbar aus einer solchen Vektoridentität gewonnen werden kann. *E. A. Weiss* (Bonn).

**Guth, Eugen:** Semivektoren, Spinoren und Quaternionen. Anz. Akad. Wiss., Wien Nr 18, 200—207 (1933).

Es wird gezeigt, daß man die von Einstein und Mayer wiedergefundene Zerlegung der reellen Lorentz-Transformationen in zwei konjugiert-komplexe Lorentz-Transformationen auch mit Hilfe von Quaternionen beschreiben kann, indem man die 4 Komponenten eines Vierervektors (mit  $x_4 = ict$  als vierte) zu einer Quaternion  $x$  zusammenfaßt und die orthogonalen Transformationen nach Cayley durch

$$x' = Bx B^\dagger \quad (1)$$

darstellt, wo  $B^\dagger$  die zu  $B$  konjugierte und konjugiert-komplexe Quaternion ist. Die Transformationen, welche  $x$  in  $Bx$  bzw.  $x B^\dagger$  überführen, gehören zwei elementweise vertauschbaren Untergruppen an und ergeben zusammen die Transformation (1).

*van der Waerden* (Leipzig).

**Cesarec, Rudolf:** Über die Konstruktion der regulären Orthogone. Rad jugoslav. Akad. Znan. i Umjetn. 246, 216—223 (1933) [Serbo-kroatisch].

An Hand des Kleinschen Modells der hyperbolischen Ebene wird das nicht-euklidische Fünfeck mit lauter rechten Winkeln und gleich langen Seiten konstruiert.

*Willy Feller* (Kiel).

**Roeser, Ernst:** Über die regulären hyperbolischen Polyeder mit unendlich vielen Flächen. Jber. Deutsch. Math.-Vereinig. 43, 78—81 (1933).

Die Einteilung der euklidischen Ebene in Quadrate oder gleichseitige Dreiecke oder reguläre Sechsecke werde stereographisch auf eine Kugel projiziert, die als Grenzkugel einer hyperbolischen Cayleyschen Raumgeometrie aufgefaßt werde. Da die ursprünglichen Polygone Kreisen einbeschrieben sind, liegen auch die Ecken jedes Bildpolygons in einer Ebene. Diese Ebenen begrenzen im Sinne der hyperbolischen Geometrie ein reguläres Polyeder mit unendlich vielen Flächen. Andere Polyeder, allerdings im uneigentlichen Gebiet, erhält man, wenn man die Tangentialebenen in den Netzpunkten der Kugel als Seitenflächen wählt. Für alle diese Polyeder wird der hyperbolische Keilwinkel benachbarter Seitenflächen berechnet, sowie andere geometrische Größen.

*Cohn-Vossen* (Locarno).

### Algebraische Geometrie:

**Winger, R. M., and P. P. Stucky:** The ternary octahedral group and its invariant rational curves. Ist. Lombardo, Rend., II. s. 66, 409—423 (1933).

Die Kollineationen einer Ebene, die ein vollständiges Viereck in sich überführen, bilden eine wohlbekannte endliche Gruppe  $G_{24}$ . Es werden hier einige rationale ebene

Kurven betrachtet, die für die Transformationen der Gruppe  $G_{24}$  invariant sind. Insbesondere studiert R. M. Winger eine rationale  $C^6$ , die mit der Cayleyschen Kurve eines vollständigen Vierseits dual ist; und findet P. P. Stucky die einzige rationale invariante  $C^8$ . Die Untersuchung stützt sich auf frühere Arbeiten von L. Berzolari [Ist. Lombardo, Rend., II. s. 37, 277 u. 304 (1904), und II. s. 49, 470 (1916)]. *E. G. Togliatti*.

**Marletta, Giuseppe:** Di alcune trasformazioni piane  $(n, n)$  d'ordine  $n$ . Atti Accad. Gioenia Catania 19, mem. 18, 1—14 (1933).

Zwischen zwei Ebenen  $\pi, \pi'$  betrachte man eine algebraische Transformation  $(l, l')$ , die den Geraden von  $\pi$  Kurven  $n$ -ter Ordnung in  $\pi'$  entsprechen läßt. Man kann  $\pi, \pi'$  als zwei Ebenen allgemeiner Lage eines Raumes  $S_4$  denken; wenn man dann ihre entsprechenden Punktpaare  $P, P'$  aus zwei Geraden allgemeiner Lage  $q, q'$  projiziert, so bilden die Schnittpunkte der Ebenenpaare  $qP, q'P'$  eine Fläche  $\Omega$  der Ordnung  $n + l + l'$ , die  $q$  und  $q'$  als  $l$ -fache und  $l'$ -fache Geraden enthält. Die Fläche  $\Omega$  kann die gegebene Transformation ersetzen. Verf. bestimmt alle möglichen Typen der Fläche  $\Omega$  im Falle, wo  $l = l' = n$ , und unter der Voraussetzung, daß die Geraden von  $\pi$  in rationale oder in elliptische Kurven von  $\pi'$  verwandelt werden. Im ersten Falle ist  $\Omega$  eine rationale Fläche; im 2. Falle ist sie entweder rational oder mit einem elliptischen Kegel 3. Grades birational äquivalent. *E. G. Togliatti (Genova)*.

**Milne, William P.:** In-and-circumscribed triangles of a plane quartic curve. J. London Math. Soc. 8, 211—216 (1933).

$\Delta$  étant une quartique plane sans point double, on sait que les triangles à la fois inscrits et circonscrits à  $\Delta$  se répartissent en différentes familles [W. L. Edge, Proc. London Math. Soc. II, 34, 492—525 (1932); ce Zbl. 6, 77]. L'auteur établit ici quelques propriétés supplémentaires parmi lesquelles nous citerons les suivantes: deux triangles d'une même famille sont inscrits dans une même conique; leurs sommets et leurs points de contact avec  $\Delta$  sont sur une même cubique; les points de contact sont sur une même conique. *P. Dubreil (Nancy)*.

**Demoulin, A.:** Sur une classe de familles de quadriques à deux paramètres. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 508—511 (1933).

L'auteur détermine d'abord une quadrique  $\Omega$  dépendant de deux paramètres  $\lambda$  et  $\mu$  et n'ayant que deux points caractéristiques  $M$  et  $N$ ; de plus, la caractéristique de  $\Omega$  pour deux déplacements infiniment petits du point  $M$  se compose de deux coniques. Alors il en est de même pour tout déplacement infiniment petit de  $M$ . Les contacts de  $\Omega$  avec les surfaces lieux de  $M$  et  $N$  sont du second ordre. Signalons encore la propriété suivante: la conjuguée de  $MN$  par rapport à  $\Omega$  engendre la congruence de Goursat la plus générale. *P. Dubreil (Nancy)*.

**Mitra, K. K.:** On the line of striction of a quadric. Bull. Calcutta Math. Soc. 24, 187—192 (1933).

Projektiv-synthetische Behandlung dieser Kurve. Zum Beweis, daß sie i. A. von 4. Ordnung ist, wird der Elfpunktekegelschnitt herangezogen. — Auf der ersten Seite muß es  $\mu$  statt  $\lambda'$  heißen. *Cohn-Vossen (Locarno)*.

**Gambier, Bertrand:** Transformations homographiques changeant une biquadratique en elle-même. Polygones de Poncelet. J. Math. pures appl., IX. s. 12, 309—336 (1933).

L'auteur reprend dans ce travail l'étude des transformations homographiques de l'espace qui changent en elle-même une biquadratique. Il établit d'abord qu'une biquadratique n'a qu'un invariant projectif, ce qui entraîne que les homographies en question sont en nombre fini: 32 au plus pour une biquadratique générale, 64 ou 96 dans certains cas particuliers. L'auteur retrouve en passant des propriétés déjà signalées par H. Mohrmann (Math. Z. 5, 268—283) concernant la disposition des tangentes à la biquadratique en quatre des seize points où le plan osculateur est stationnaire. Puis il montre que le nombre des homographies laissant invariante une biquadratique générale est effectivement 32, résultat déjà obtenu par Harnack [Math. Ann. 12, 47—86 (1877)] au moyen des fonctions elliptiques. L'auteur considère pour cela succes-



sivement les 4 homologies involutives et les 3 involutions biaxiales conservant séparément chaque quadrique du faisceau, puis les 12 involutions biaxiales échangeant les cônes par couples. Pour les 3 premières involutions biaxiales, les cordes joignant les points correspondants engendrent une surface algébrique de degré 4; pour les 12 autres, les mêmes cordes engendrent 6 quadriques. De plus, les sous-groupes invariants du groupe des 32 homographies se trouvent mis en évidence. L'auteur est conduit enfin à différentes propriétés des polygones de Poncelet qui se rattachent à un travail de Lebesgue [Ann. Toulouse 13, 61—91 (1921)]. *P. Dubreil (Nancy).*

**Longhi, Ambrogio:** Un teorema di geometria numerativa concernente le serie di gruppi di punti sopra una curva algebrica. Applicazioni varie alle curve di ogni spazio. Rend. Semin. mat. Univ. Padova 4, 1—26 (1933).

Eine Schar von Hyperflächen schneide aus einer abgebr. Kurve  $\Gamma$  abgesehen von festen Punkten eine Schar  $\Sigma$  von Punktgruppen aus. Es wird ausgerechnet, wie viele Punkttupel ( $pqr$ ) es auf der Kurve gibt, von denen jedes Paar ( $pq$ ,  $pr$  oder  $qr$ ), mit der Multiplizität  $\mu$  gezählt, je einer Punktgruppe von  $\Sigma$  angehört, deren übrigen Punkte außerdem vorgebene Multiplizitäten  $\nu_1, \dots, \nu_n$  haben. Die Formel folgt ohne weiteres aus einer bekannten Formel von De Jonquières und einer Formel des Verf. (Bull. Un. Mat. Ital. 9, Nr 4) für die Anzahl der zyklischen Tripel einer  $(\xi, \eta)$ -Korrespondenz auf einer abgebr. Kurve. Zahlreiche Spezialfälle der Formel (betreffend oskulierende Hyperebenen usw.) werden aufgezählt. *van der Waerden (Leipzig).*

**Carbonaro, Carmela:** I complessi di piani, d'ordine uno dello spazio a cinque dimensioni. Atti Accad. Gioenia Catania 19, mem. 20, 1—47 (1933).

G. Marletta [Rend. Circ. mat. Palermo 28, 353 (1909); Atti Accad. Gioenia Catania (5) 3, (1909)] hat alle  $\infty^3$  Geradensysteme erster Ordnung eines Raumes  $S_4$  bestimmt. In dieser Arbeit werden ähnlich die  $\infty^3$  Ebenensysteme erster Ordnung eines Raumes  $S_5$  diskutiert. Der Anfangspunkt der Untersuchung ist die Bemerkung, daß ein Ebenensystem der gesuchten Art, wenn es von einer Hyperebene allgemeiner Lage geschnitten wird, ein Strahlensystem liefert, das in der Klassifikation von G. Marletta enthalten ist; es ist so leicht, mit den oben zitierten Arbeiten als Leitfaden, das Ziel zu erreichen. Die gesuchten Ebenensysteme werden in verschiedene Typen eingeteilt: 1. Ebenen, die eine irreduzible  $V_3$  des Raumes  $S_5$  in Kurven 3. Ordnung schneiden; 2. Ebenen, die eine  $V_3$  in Kegelschnitten und eine andere  $V_3$  in Geraden schneiden; 3. Ebenen, die mit drei  $V_3$  je eine Gerade gemein haben; 4. Ebenen, die mit einer  $V_3$  und mit einer Fläche je eine Gerade gemein haben; 5.  $\infty^3$  Ebenen, deren Schnittgeraden mit einer Hyperebene drei nicht getrennte Brennpunkte besitzen.

*E. G. Togliatti (Genova).*

**Du Val, Patrick:** On the sextic loci whose curve sections are elliptic. J. London Math. Soc. 8, 206—210 (1933).

Die allgemeinste  $V_4^6$ , deren Schnitte mit ebenen Räumen der passenden Dimension elliptische Kurven sind, ist nach Scorza die Segresche  $V_4^6$ , das Graßmannsche Bild der Kongruenz der Treffgeraden zweier Ebenen des Raumes [5]. Ein Grenzfall entsteht, wenn die beiden Ebenen zusammenrücken ohne sich zu schneiden. Beide Fälle werden näher untersucht; insbesondere werden Abbildungen auf den [4] angegeben. Sodann werden die hyperebenen Schnitte dieser  $V_4^6$  untersucht; so entstehen vier Typen von  $V_3^6$  mit der im Titel genannten Eigenschaft. Ein weiterer Typus  $V_3^{6*}$  ist nach Enriques das Graßmannsche Bild der Kongruenz der Treffebenen von drei Geraden in [5]. Wieder werden die Grenzfälle untersucht und Abbildungen angegeben. Schließlich werden die ebenen Schnitte der  $V_3^{6*}$  untersucht; es sind Flächen von Del Pezzo.

*van der Waerden (Leipzig).*

**Roth, L.: Ruled forms in four dimensions.** Proc. London Math. Soc., II. s. 35, 380—406 (1933).

Abhandlung über  $\infty^2$  Geradensysteme die eine Hyperfläche  $V_3$  des 4-dimensionalen Raumes einfach oder mehrfach überdecken. Zunächst eine Einleitung über die ersten

Eigenschaften solcher Systeme und über ihre Singularitäten; dann eine Reihe von Beispielen von  $V_3$  der betrachteten Art, und dann die Bestimmung verschiedener Charaktere der Doppelfläche und der mehrfachen Tangenten der  $V_3$  mit der funktionalen Methode. Schließlich wird das System der  $\infty^2$  Geraden studiert, die eine allgemeine Fläche des Raumes  $S_4$  viermal schneiden; 16 Beispiele. *E. G. Togliatti (Genova).*

**Roth, L.:** Some formulae for primals in four dimensions. Proc. London Math. Soc., II. s. 35, 540—550 (1933).

Eine Reihe von Formeln, die eine Hyperfläche  $F$   $n$ -ter Ordnung eines 4-dimensionalen Raumes betreffen. Der Form  $F$  werden folgende einfache Singularitäten zugewiesen: eine Doppelfläche  $B$ , eine dreifache Linie  $C$ , die auch für  $B$  dreifach ist, und eine gewisse Anzahl  $\xi$  vierfacher Punkte, die für  $C$  vierfach und für  $B$  sechsfach sind. Als fundamentale Charaktere von  $F$  werden folgende gewählt: die Ordnung  $n$ , die Klassen  $a$  und  $m$  der ebenen Schnittkurven und der hyper ebenen Schnittflächen, die Ordnung  $j$  der Kuspidualkurve (die auf der Doppelfläche  $B$  liegt). Verschiedene andere Charaktere von  $F$  werden ausgerechnet; z. B. die Klasse  $w$ , die Anzahl  $\xi$  der vierfachen Punkte, die Anzahl  $T$  der scheinbaren dreifachen Punkte von  $B$  usw. Die Beweise sind entweder auf unmittelbare Bemerkungen oder auf die üblichen Korrespondenzprinzipien gestützt. *E. G. Togliatti (Genova).*

**Segre, B.:** Sulla serie caratteristica d'una superficie sopra una varietà algebrica a quattro dimensioni. Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 917—918 (1933).

An einem Beispiel wird gezeigt, daß die von Comessati (vgl. dies. Zbl. 6, 127) definierte charakteristische Schar einer Fläche  $\Phi$  auf einer  $V^4$  sich nicht linear durch die anderen bekannten invarianten und kovarianten Scharen von Punktgruppen der Fläche ausdrücken läßt. *van der Waerden (Leipzig).*

**Paul, Marcel:** Sur les points triples uniplanaires d'une surface algébrique. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, III. s. 18, H. 2, 1—17 (1933).

Etude des points triples uniplanaires d'une surface algébrique, c'est-à-dire des points triples où le cône tangent se réduit à trois plans confondus. Au moyen de la transformation quadratique  $x = x'z'$ ,  $y = y'z'$ ,  $z = z'$ , l'auteur examine les différents cas qui peuvent se présenter, suivant que la section de la surface par le plan tangent triple admet un point quadruple à tangentes distinctes, à tangente double et deux tangentes distinctes, à deux tangentes doubles, etc. . . . , un point quintuple, etc. . . . Dans le premier et le plus simple de ces cas, la surface possède dans le voisinage du point triple une droite simple sur laquelle se trouvent quatre points doubles biplanaires ordinaires. *P. Dubreil (Nancy).*

**Waerden, B. L. van der:** Zur algebraischen Geometrie. III. Über irreduzible algebraische Mannigfaltigkeiten. Math. Ann. 108, 694—698 (1933).

Je  $n$  algebraische Funktionen  $\xi_1, \dots, \xi_n$  von  $r$  Unbestimmten  $t_1, \dots, t_r$  bestimmen bekanntlich eine irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit  $M$  in Parameterdarstellung. Dabei werden aber im allgemeinen nicht alle Punkte von  $M$  durch die Parameterdarstellung unmittelbar gegeben. Die vorliegende Arbeit zeigt nun, wie man mit Hilfe einer Normbildung, die bereits in der Hentzeltschen Eliminationstheorie auftritt, auch diejenigen Punkte von  $M$  finden kann, für die die ursprüngliche Parameterdarstellung versagt. Für den Fall, daß der Grundkörper der Körper aller komplexen Zahlen ist, werden aus diesem Verfahren zwei Folgerungen gezogen. Einmal wird ein einfacher Beweis für den Satz von Ritt gegeben, welcher lautet: Ist  $g(x_1, \dots, x_n)$  ein Polynom, das nicht in allen Punkten von  $M$  verschwindet, so ist jeder Punkt von  $M$ , in dem  $g = 0$  ist, Limespunkt von solchen Punkten von  $M$ , in denen  $g \neq 0$  ist. Ferner wird in Ergänzung einer früheren Arbeit des Verf. gezeigt, daß eine  $r$ -dimensionale irreduzible algebraische Mannigfaltigkeit  $M$  im komplexen Gebiet ein rein  $2r$ -dimensionaler Komplex im Sinne der Topologie ist (II. vgl. dies. Zbl. 6, 365). *F. K. Schmidt.*



**Room, T. G.:** The freedoms of determinantal manifolds. Proc. London Math. Soc., II. s. 36, 1–28 (1933).

Die Elemente  $x_{\alpha\beta}$  einer  $(p, q)$ -Matrix seien allgemeine, lineare Funktionen der Koordinaten eines Punktes des Raumes  $[n]$ . Durch Nullsetzen aller  $p$ -reihigen Unterdeterminanten der Matrix erhält man für  $p \leq q$  die Gleichungen einer  $(n - q + p - 1)$  dimensionalen Mannigfaltigkeit  $(|p, q|, [n])$ . Die Gleichungen entstehen durch Elimination der Parameter  $\lambda_1, \dots, \lambda_4$  aus

$$\sum_{\alpha} \lambda_{\alpha} x_{\alpha\beta} = 0;$$

daher wird die Mannigfaltigkeit  $(|p, q|, [n])$  erzeugt von den Durchschnitten entsprechender Hyperebenen aus  $q$  projektiven linearen Systemen von  $\infty^{p-1}$  Hyperebenen. Aus dieser Erzeugungsweise werden die zum Teil bekannten Eigenschaften der Mannigfaltigkeiten  $(|p, q|, [n])$ : andere Erzeugungsweisen, Abbildungen, lineare Unterräume usw. hergeleitet. Es wird bewiesen, daß  $(|p, q|, [n])$  normal ist für  $q \leq n$ , sowie für  $n = q - 1, p = 3$ , für  $p = q$  und schließlich für  $p = q - 1, n \geq 4$ . Schließlich wird die Zahl der Freiheitsgrade  $f$  der Mannigfaltigkeiten  $(|p, q|, [n])$  bestimmt: nach einer schwierigen Analyse findet man:

$$f = pq(n + 1) - p^2 - q^2 + 1,$$

ausgenommen für  $p = q, n \leq 2$ , in welchem Fall

$$f = \binom{p+n}{n} - 1 \text{ ist.}$$

van der Waerden (Leipzig).

**Purell, Edwin J.:** Involutorial space Cremona transformations determined by non-linear null reciprocities. Amer. J. Math. 55, 381–389 (1933).

Space Cremona transformations are studied, which are obtained by setting up an arbitrary Cremona transformation between two line congruences of order one and by defining corresponding points of homologous lines by means of a fixed correlation. The author is especially concerned with the involutorial case not considered by Montesano.

O. Zariski (Baltimore).

### Differentialgeometrie:

**Errera, A.:** Un problème de géométrie infinitésimale. II. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, III. s. 18, H. 2, 1–21 (1933).

Ausführliche Behandlung der in einer früheren Note (vgl. dies. Zbl. 7, 129) genannten Aufgabe: Es sei ein Gebiet  $D$  auf der Einheitskugel und eine Zahl  $\alpha$  mit  $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$  gegeben. Welches ist die Länge der kürzesten Kurve, von der jeder Punkt des Gebietes  $D$  einen sphärischen Abstand  $\leq \alpha$  hat? Anders ausgedrückt: Welchen Weg muß ein in konstanter Höhe über dem Erdboden fliegendes Flugzeug mindestens zurücklegen, damit von ihm aus im Laufe der Fahrt ein vorgegebenes Gebiet auf der Erde vollständig gesehen (photographiert) werden kann? In einigen Spezialfällen wird das Problem gelöst, im allgemeinen weitgehend gefördert. W. Fenchel (Kopenhagen).

**Hösel, Erich:** Topologische Fragen der Differentialgeometrie. XLVII. Minimaldarstellung von Flächengeweben. Abh. math. Semin. Hamburg. Univ. 9, 273–290 (1933).

Der Verf. löst die Aufgabe, für ein gegebenes Flächengewebe eine Metrik des umgebenden Raumes zu finden, wodurch das Gewebe eine möglichst günstige geometrische Verwirklichung bekommt.

van Kampen (Den Haag).

**Sauer, Robert:** Wackelige Kurvennetze bei einer infinitesimalen Flächenverbiegung. Math. Ann. 108, 673–693 (1933).

Das  $u$ -Netz einer Fläche  $F$  heißt wackelig bei der Infinitesimalverbiegung  $W$  der Fläche  $F$ , wenn die Querregelflächen der  $u$ -Kurven bei  $W$  stationären Drall haben. Querregelfläche einer  $u$ -Kurve heißt der Ort der Tangenten der  $v$ -Kurven in allen Punkten einer  $u$ -Kurve. Mit Hilfe des Drehnisses ergibt sich, daß bei gegebenem  $W$  die  $u$ -Kurven auf  $F$  willkürlich vorgegeben werden können, sofern nur die Kurven-

richtungen ein gewisses durch  $W$  bestimmtes Richtungsfeld vermeiden. Die  $v$ -Richtungen werden dann eindeutig durch  $W$  bestimmt. Auch die Querregelflächen der  $v$ -Kurven erhalten von selber bei  $W$  ihren Drall. Das Netz auf dem Drehriß, das einem wackligen Netz von  $F$  entspricht, steht zu diesem in einer reziproken Beziehung: In entsprechenden Punkten ist die  $u$ -Richtung des einen Netzes parallel der  $v$ -Richtung des anderen. Umgekehrt: gibt es zu einem Kurvennetz ein reziprokes Netz im angegebenen Sinn, so sind beide Netze wacklig. Zu einem Netz ohne Asymptotenlinien gibt es bis auf Ähnlichkeitstransformationen höchstens ein reziprokes Netz und nur eine zugehörige Infinitesimalverbiegung. Dagegen ist das Netz der Asymptotenlinien einer Fläche wacklig bei jeder Infinitesimalverbiegung derselben. Die Wackligkeit eines Netzes erweist sich als projektive Eigenschaft. Hierdurch ergibt sich eine neue Herleitung eines Darboux'schen Verfahrens: Ist  $F$  und der Drehriß von  $W$  gegeben, so kann man für jede zu  $F$  projektive Fläche eine Infinitesimalverbiegung mittels bloßer Quadraturen herleiten. Zu jedem der hier angeführten in der Arbeit erledigten Probleme wird das Analogon aus der Theorie der Polyederverknickung behandelt. Zugrunde gelegt werden Polyeder aus viereckigen gradlinigen nichtebenen Polygonen, die schachbrettartig aneinandergrenzen. Der Begriff reziproker Polygonnetze ergibt sich aus dem oben Gesagten. Das Kriterium, wann ein Polygonnetz ein reziprokes besitzt (und daher wackelig ist) stellt sich zunächst in affiner Form dar, erweist sich aber als projektiv; die Relation zweier reziproker Netze kann durch eine eigentliche Ebene genau so definiert werden, wie durch die unendlich ferne. Polygonnetze, die zu Netzen aus Asymptotenlinien analog sind, erhält man durch die Forderung, daß die vier von einem Knotenpunkt auslaufenden Polygonseiten stets in einer Ebene liegen. Das Analogon eines konjugierten Netzes ist ein Polygonnetz mit ebenen Vierecken. Zu einem Netz mit ebenen Vierecken kann nur ein Netz mit ebenen Vierkanten reziprok sein. Bei der Reziprozität sind nämlich stets die von einem Knotenpunkt des einen Netzes auslaufenden Kanten parallel den vier Seiten eines Vierecks des reziproken Netzes.

Cohn-Vossen (Locarno).

**Scholz, Edmund: Flächentheoretische Integralsätze.** Schr. math. Semin. u. Inst. angew. Math. Univ. Berlin 1, 161—185 (1933).

Es wird eine größere Zahl von bekannten Sätzen der Flächentheorie aus der Greenschen Integralformel hergeleitet. In einigen Fällen (Minkowskische Formeln für Eiflächen, Gauß-Bonnetsche Formel) weichen die Herleitungen des Verf. wenig von bekannten ab. In anderen Fällen, insbesondere bei Sätzen über Minimalflächen, ergeben sich neue einfache Beweise. Erwähnenswert sind außerdem Vektorformeln für Normalkrümmung und geodätische Torsion einer Flächenkurve sowie die Differentialparameter, ferner sehr einfache Beweise für die Kennzeichnungen der Kugeln als Eiflächen konstanter mittlerer bzw. Gaußscher Krümmung. [Ähnlich ist übrigens schon Süss, Tôhoku Math. J. 31, 202—209 (1929) beim Beweis sehr viel allgemeinerer Sätze vorgegangen.] Neu ist der folgende Satz, der allerdings eng mit Jacobis Satz, daß das Hauptnormalenbild einer geschlossenen Raumkurve die Kugeloberfläche halbiert, zusammenhängen dürfte: Das durch die Hauptnormalen vermittelte sphärische Bild einer Schar geschlossener Raumkurven hat den Flächeninhalt Null.

W. Fenchel (Kopenhagen).

**Cisotti, U.: Quoziente di vettori e vettori monogeni.** Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 764—767 (1933).

In einem  $n$ -dimensionalen Raume mit der Metrik  $g_{\lambda\mu}$  ( $= g_{\mu\lambda}$ ) ist das Verhältnis

$$\frac{dx^\mu dx^\lambda g_{\lambda\mu} \nabla_\mu v^\nu}{dx^\alpha dx^\beta g_{\alpha\beta}} \quad (V)$$

dann und nur dann von  $dx$  unabhängig, wenn

$$g_{\nu\lambda} \nabla_\mu v^\nu + g_{\nu\mu} \nabla_\lambda v^\nu = \varrho g_{\lambda\mu} \quad (1)$$



Für  $R_2$  (bezogen auf orthogonales kartesisches Koordinatensystem,  $g_{\lambda\mu} = \delta_{\lambda\mu}$ ) ist (1) mit der Monogenitätsbedingung der Funktion  $w = v^1 + i v^2$  gleichbedeutend. Infolgedessen nennt der Autor solche Vektoren (im  $R_3$ , mit  $g_{\lambda\mu} = \delta_{\lambda\mu}$ , auf welchen sich die Arbeit bezieht) monogene Vektoren. Führt man den Begriff des „reziproken“ Vektors  $\frac{1}{a} = \frac{a}{g_{\lambda\mu} a^\lambda a^\mu}$  ein, so kann man (V) noch anders schreiben. *Hlavatý.*

**Manarini, M.:** Sulla divergenza dei plurivettori negli spazi  $S_n$ . Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 799—803 (1933).

Fortsetzung der Note in Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 706—712 (1933) (dies. Zbl. 7, 79). Zuerst wird die Formel für die Divergenz eines  $p$ -Vektors (im  $n$ -dimensionalen euklidischen Raume) mittels der Integralrechnung abgeleitet und diese (zusammen mit dem Stockeschen Satze) zur Ableitung neuer Formeln benützt, z. B.  $\operatorname{div} \operatorname{rot} u = 0$  usw. *Hlavatý (Praha).*

**Grove, V. G.:** Contributions to the theory of transformations of nets in a space  $S_n$ . Trans. Amer. Math. Soc. 35, 683—688 (1933).

Im euklidischen  $n$ -dimensionalen Raum  $S_n$  heiße eine 2-parametrische Gradennigfaltigkeit eine Kongruenz, wenn sie sich, wie im  $S_3$  stets, auf zwei Arten in eine einparametrische Torsenschar aufteilen läßt. Netz heiße die Spur der beiden Torsenscharen auf einer Querfläche der Kongruenz. In der Arbeit werden analytisch einige Beziehungen zwischen 2 zur selben Kongruenz gehörigen Netzen abgeleitet, wobei die Dimensionenzahl in den Formeln keine Rolle spielt und metrische Relationen verwandt und betrachtet werden. So ergibt sich z. B. der nur für  $n > 3$  wesentliche Satz: Alle Normalkongruenzen einer Fläche schneiden auf ihr ein- und dasselbe Netz aus, und dieses ist orthogonal und konjugiert. — Dem allgemeinen Ansatz wird auch die Transformation durch reziproke Radien untergeordnet. *Cohn-Vossen (Locarno).*

**Buzano, Piero:** Interpretazione geometrica dell'arco proiettivo di una curva sghemba. Rend. Semin. mat. Univ. Padova 4, 38—51 (1933).

Man denkt sich zwei Punkte  $A_i$  ( $i = 1, 2$ ) einer Raumkurve  $K$ , welche keinem Nullsystem angehört.  $C_i$  soll ein Nullsystem sein, welches mittels des Limitierungsverfahrens aus drei konsekutiven Tangenten in  $A_i$  und zwei in  $A_k$  ( $i \neq k = 1, 2$ ) entspringt,  $C$  ein anderes Nullsystem in dem Bündel  $(C_1, C_2)$ , welches die Kubik enthält, die in  $A_1, A_2$  eine Berührung zweiter Ordnung hat. Die speziellen Nullsysteme in dem obenerwähnten Bündel sollen die Koordinaten  $\infty, 0$  haben. Das Doppelverhältnis von  $C_i, C$  resp. von  $C_1, C_2$  mit den zwei speziellen Nullsystemen liefert zwei Invarianten  $H_i$  der Punkte  $A_1 \rightarrow A_2$  resp. die Invariante  $J = H_1/H_2$ . Der Projektivbogen  $du$  von  $K$  [Fubini-Čech, Introduction à la géométrie différentielle des surfaces. Chap. III, n. 9; dies. Zbl. 5, 311; vgl. auch Hlavatý, Rendiconti della r. Acc. dei Lincei 16 (1932); dies. Zbl. 5, 261, 376 und 6, 30] ist mit  $J$  mittels  $du^3 = 30(J - 1)$  gebunden. Beweisführung mittels der analytischen Umschreibung der obenerwähnten geometrischen Überlegungen. *Hlavatý (Praha).*

**Delgelize, A.:** Sur la théorie des congruences et la déformation infiniment petite des surfaces. Mém. Soc. Roy. Sci. Liège, III. s. 18, H. 1, 1—24 (1933).

Soit  $ds^2 = \theta^2(du^2 + dv^2)$  l'élément linéaire d'une surface  $S$ ; on porte sur la tangente de la courbe  $u$ , par exemple, le segment égal à  $\theta$  et on mène par le point  $\mathfrak{M}$  obtenu une droite  $d$  parallèle à la normale de  $S$ . Quand est la surface  $S$  l'enveloppée moyenne de la congruence engendrée par la droite  $d$ ? L'auteur montre que les surfaces  $S$  en question sont les surfaces minima, les surfaces développables et les surfaces applicables sur les surfaces spirales. Comme la surface  $S$  et la surface moyenne ( $\mathfrak{M}$ ) de la congruence se correspondent avec orthogonalité des éléments linéaires, l'auteur examine la fonction caractéristique  $\varphi$  de Weingarten pour la déformation infiniment petite considérée. Les surfaces spirales (et les surfaces de révolution) possèdent une fonction  $\varphi$  invariante pour toutes les déformations de la surface et cette propriété les caractérise.

*S. Finikoff (Moscou).*

**Kozmine: Démonstration synthétique du théorème de M. Finikoff sur les congruences stratifiables appartenant à un complexe linéaire.** Bull. Sci. math., II. s. 57, 173—175 (1933).

Une congruence  $\theta$  est stratifiable dans un sens avec une congruence  $\theta_1$  s'il existe  $\infty^1$  surfaces  $S_i$  dont les plans tangents aux points situés sur un même rayon de  $\theta$  passent par le rayon homologue de  $\theta_1$ . Le théorème en question: si  $\theta$  appartient à un complexe linéaire  $\tau$ , le même complexe contient  $\theta_1$ . L'auteur démontre ce théorème en considérant les quadriques déterminées chacune par trois droites  $(A_i B_i)$ ,  $(B_i C_i)$  ou  $(A_i C_i)$ ,  $A_i$ ,  $B_i$  ou  $C_i$  étant points homologues des surfaces  $S_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . A la limite  $A_i = B_i = C_i$  les trois quadriques coïncident avec la quadrique  $Q$  qui est aussi la limite de la quadrique déterminée par les rayons  $(A_1 A_2, B_1 B_2, C_1 C_2)$  de  $\theta$ ; elle appartient donc au complexe  $\tau$  et contient évidemment le rayon homologue de  $\theta_1$ . *S. Finikoff (Moscou).*

**Villa, Mario: Sulle ipersuperficie  $\frac{Y-\bar{Y}}{i} = f\left(\frac{X-\bar{X}}{i}\right)$  localmente equivalenti all'ipersfera.** Ist. Lombardo, Rend., II. s. 66, 359—372 (1933).

E. Cartan hat die Bedingung dafür, daß eine Hyperfläche im Bild  $-R_4$  der komplexen Ebene im Sinne der pseudokonformen Geometrie mit der Hyperkugel  $XX + Y\bar{Y} - 1 = 0$  lokal äquivalent ist, im Verschwinden einer relativen Invariante gefunden. (Dies. Zbl. 5, 373.) Dies Kriterium wird hier auf die Flächen vom Typus  $\frac{Y-\bar{Y}}{i} = f\left(\frac{X-\bar{X}}{i}\right)$  angewandt. Setzt man  $\frac{X-\bar{X}}{i} = x$ ,  $\frac{Y-\bar{Y}}{i} = y$ , so zeigt sich, daß die gesuchten Hyperflächen dadurch charakterisiert sind, daß die Affinkrümmung  $K$  der Kurve  $y = f(x)$  der Differentialgleichung  $K'' - 3K^2 = 0$  genügt. Bei der Integration dieser Gleichung sind drei Fälle zu unterscheiden. Man erhält 1.  $K = 0$ , 2.  $K = \frac{2}{u^2}$ , 3.  $K = 2\wp(u)$ , [wo  $\wp(u)$  die äquianharmonische Weierstraßsche  $\wp$ -Funktion darstellt] und dementsprechend im Falle 1 eine Parabel, im Falle 2 die Kurve  $y \cdot e^x = 1$  und im Falle 3 die Kurven  $e^x + e^{iy} + e^{-iy} + 1 = 0$  und  $e^x + e^y + 1 = 0$ . Dementsprechend existieren drei Familien von Hyperflächen mit der geforderten Eigenschaft. *E. A. Weiss (Bonn).*

**Beckenbach, E. F.: Minimal surfaces in euclidean n-space.** Amer. J. Math. 55, 458—468 (1933).

Die Weierstraßsche explizite Parameterdarstellung der Minimalkurven wird auf den  $n$ -dimensionalen Raum übertragen. (Eisenhart 1911 für  $n = 4$ .) Daraus ergibt sich bekanntlich unmittelbar auch eine Parameterdarstellung der (zweidimensionalen) Minimalflächen. *Willy Feller (Kiel).*

**Kosambi, D. D.: Parallelism and path-spaces.** Math. Z. 37, 608—618 (1933).

Verf. gibt eine geometrische Studie eines Differentialgleichungssystems

$$\ddot{x}^i + \alpha^i(x^h, \dot{x}^h, t) = 0. \quad (i, h = 1, \dots, n) \quad (1)$$

Es wird ein kovariantes Differential  $D(u)^i$  für ein System von  $n$  Funktionen  $u^i$  definiert

$$D(u)^i = \dot{u}^i + \beta^i(x, \dot{x}, u, t),$$

das den folgenden Bedingungen genügt: 1. Die Bahnkurven des obengenannten Differentialgleichungssystems sind autoparallel. 2. Mit  $u^i$  ist auch  $D(u)^i$  ein Vektor.  $\beta^i$  hat dann die Gestalt  $\gamma_k^i(x, \dot{x}, t) u^k + \varepsilon^i(x, \dot{x}, t)$ , wo  $\varepsilon^i = \alpha^i - \gamma_k^i \dot{x}^k$ . Ein kovarianter Differentialquotient besteht nicht. Dieses bezüglich der Addition nicht distributive Differential bestimmt ein distributives („biderivate“) das durch Weglassen des Gliedes  $\varepsilon^i$  entsteht.  $\gamma_k^i$  wird bestimmt durch die Bedingung: Die Variationsgleichungen von (1) haben die Gestalt  $D^2(u)^i = \varphi^i(x, \dot{x}, u, t)$ ;  $\left(\gamma_k^i = \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha^i}{\partial \dot{x}^k}\right)$ . Verf. zeigt noch, daß man dieselben Resultate bekommt, wenn die Vektortransformation etwas allgemeiner ist:  $u^i = F_j^i(x, \dot{x}, t) u^j$ . Es folgen noch einige Bemerkungen über die Normalform der Variationsgleichungen. *J. Haantjes (Delft).*



**Cartan, Elie:** *Observations sur le mémoire précédent.* Math. Z. 37, 619—622 (1933).

Das Problem, invariante geometrische Eigenschaften zu finden, die zu dem Differentialgleichungssystem  $\ddot{x}^i + \alpha^i(x, \dot{x}, t) = 0$  gehören, wird gelöst, wobei Verf. den Raum von  $2n + 1$  Dimensionen (von  $x$ ,  $\dot{x}$ , und  $t$ ) betrachtet. Er gelangt so zu einem kovarianten Differential eines Vektors

$$DX^i = dX^i + [\gamma^i_k dt + \gamma^i_{kh} (dx^h - \dot{x}^h dt)] X^k,$$

wo

$$\gamma^i_k = \frac{1}{2} \frac{\partial \alpha^i}{\partial \dot{x}^k} \quad \text{und} \quad \gamma^i_{kh} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \alpha^i}{\partial \dot{x}^k \partial \dot{x}^h}. \quad J. Haantjes (Delft).$$

**Agostinelli, C.:** *Relazioni differenziali per l'omografia di Riemann.* Atti Accad. naz. Lincei, Rend., VI. s. 17, 894—897 (1933).

Die bekannten Identitäten von Padova-Bianchi und Veblen (Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 8, 192—197; vgl. M. Pastori, Boll. Un. Mat. Ital. 10, 202—205; dies. Zbl. 2, 413) für die Krümmungsgröße werden in der direkten italienischen Symbolik (Burgatti-Boggio-Burali-Forti: Geometria differenziale. Bologna 1930) abgeleitet.

Hlavatý (Praha).

### **Topologie:**

● **Sperner, E.:** *Über die fixpunktfreien Abbildungen der Ebene.* (Hamburg. math. Einzelschr. H. 14.) Leipzig: B. G. Teubner 1933. 47 S. u. 27 Fig. RM. 2.—

Der erste Teil der Abhandlung enthält einen ausführlich dargestellten Beweis des Brouwerschen Translationssatzes, des Satzes also, daß bei einer fixpunktfreien topologischen indikatriceserhaltenden Abbildung der Ebene auf sich jeder Punkt in einem Translationsgebiete enthalten ist. Dabei ist ein Translationsgebiet ein ebenes Gebiet, welches zu seinem Bild fremd ist und in keinem Gebiet von derselben Eigenschaft als echte Teilmenge enthalten ist. Zur Orientierung des Lesers sei bemerkt, daß dieser Satz nicht nur durch seine außerordentliche (in der ebenen Topologie sonst kaum vorkommende) Schwierigkeit und seine Anwendungen auf die Theorie der zweigliedrigen Gruppen bekannt ist, sondern daß er einer der wenigen topologischen Sätze ist, die sich mit der allgemeinen geometrischen Struktur (der „Morphologie“) der stetigen Abbildungen beschäftigen. — Bekanntlich braucht eine fixpunktfreie, die Orientierung erhaltende Abbildung der Ebene auf sich noch keiner eigentlichen Translation (Parallelverschiebung) topologisch äquivalent zu sein. Verf. beweist nun im zweiten Teile seiner Arbeit den neuen Satz: eine topologische Abbildung  $t$  der Ebene auf sich ist dann und nur dann einer Parallelverschiebung topologisch äquivalent, wenn sie neben den Eigenschaften, die die Indikatrix zu erhalten und keinen Fixpunkt zu besitzen, noch singularitätenfrei ist, d. h. wenn jeder ebene Jordanbereich  $B$  höchstens mit endlichvielen seiner sukzessiven Bilder  $t(B)$ ,  $t^2(B)$  usw. gemeinsame Punkte hat. Die Nichtsingularität einer Abbildung ist gleichbedeutend mit dem Nichtauftreten von singulären Punkten [ein Punkt  $a$  heißt singulär, wenn es zu ihm einen Jordanbereich  $B$  gibt von der Eigenschaft, daß jede Umgebung von  $a$  mit unendlichvielen  $t^n(B)$  gemeinsame Punkte hat]. Verf. weist auf folgendes weitere Problem der Morphologie der stetigen Abbildungen der Ebene hin: Die Verteilung der Singularitäten einer beliebigen fixpunktfreien Abbildung zu erforschen.

P. Alexandroff (Moskau).

**Pannwitz, Erika:** *Eine elementargeometrische Eigenschaft von Verschlingungen und Knoten.* Math. Ann. 108, 629—672 (1933).

Über die mehrfachen Sehnenn von verketteten bzw. verknoteten einfachen geschlossenen Polygonen im dreidimensionalen Raume wird bewiesen: I. Sind  $A$  und  $B$  zwei solche Polygone, so ist die Anzahl der vierfachen Sehnenn mit der Schnittfolge  $BABA$  mindestens gleich dem Produkte der beiden unsymmetrischen Homotopieverschlingungszahlen. II. Hat  $A$  die Verknotungszahl  $k$ , so besitzt  $A$  mindestens  $k^2:2$  vierfache Sehnenn. Hierbei ist die unsymmetrische Homotopieverschlingungszahl

von  $A$  mit  $B$  die notwendige Durchdringungszahl der beiden Polygone, wenn diese bei festem  $B$  und beliebig (auch mit Selbstdurchdringung) deformierbarem  $A$  voneinander befreit werden. Sie ist i. A. größer als die — gegen Deformation beider Polygone invariante — symmetrische Homotopieverschlingungszahl, und diese ist gleich dem Absolutwerte der Homologieverschlingungszahl. Die Anzahl der vierfachen Sehnen ist also mindestens so groß, wie das Quadrat der Homologieverschlingungszahl der beiden Polygone. Die Verknotungszahl  $k$  von  $A$  ist die absolut kleinste Schnitzzahl von  $A$  mit den von  $A$  berandeten Elementarflächenstücken.  $k$  ist gerade; ein eigentlicher Knoten hat also mindestens zwei vierfache Sehnen. Sehnen höherer Vielfachheit lassen sich durch beliebig kleine Verrückungen der Ecken beseitigen. Die Arbeit enthält außer den beiden angegebenen Hauptsätzen noch Sätze über den Zusammenhang der verschiedenen Verschlingungsbegriffe und über die Gesamtheit der dreifachen Sehnen, sowie eine Skizze der Übertragung beider Hauptsätze auf stetige Kurven.

Friedrich Levi (Leipzig).

**Fries, P. Lambert:** Über stetige Abbildungen der Geraden auf metrische Räume. Anz. Akad. Wiss., Wien Nr 18, 192—194 (1933).

Es handelt sich um die Frage: Wann existiert zu einer Zerlegung  $R = \sum X$  eines Raumes  $R$  in paarweise fremde abgeschlossene Mengen  $X$  eine eindeutige, stetige Abbildung von  $R$  auf einen metrischen Raum derart, daß die Tranchen  $X$  die Punkturilmengen sind? Für kompaktes  $R$  ist nach Alexandroff notwendig und hinreichend, daß die Zerlegung oberhalb stetig ist (d. h. daß zu jeder konvergenten Tranchenfolge  $X_i$  eine Tranche  $X$  existiert, so daß  $\lim X_i \subset X$ ). Verf. zeigt: Ist  $R$  die Gerade, so ist notwendig und hinreichend, daß für jedes abgeschlossene Intervall  $I$  die Zerlegung  $I = \sum I \cdot X$  oberhalb stetig ist.

Nöbeling (Wien).

**Kusner, J. H.:** On continuous curves with cyclic connection of higher order. C. R. Soc. Sci. Varsovie 25, 71—92 (1933).

The author considers the question as to whether, for any  $n > 2$ , there exists a locally connected continuum  $M$  between any two points of which there exists exactly  $n$  independent simple arcs in  $M$  and proves that for  $n = 3, 4$  no such continuum can exist. Also the notion of cyclic connectivity is generalized as follows: a locally connected continuum  $M$  is said to be  $n$ -cyclicly connected provided every  $n$  points of  $M$  lie together on a simple closed curve of  $M$ . The author shows that if  $M$  is  $n$ -cyclicly connected, the set of ramification points of  $M$  is dense in itself, each ramification point is an im kleinen cycle point, and no set of  $n - 1$  points cuts  $M$  into more than  $n - 1$  components. Also  $M$  is 3-cyclicly connected if and only if every four points of  $M$  which do not lie together on a simple closed curve lie in all possible orders on arcs in  $M$ . T. Whyburn.

**Wilder, R. L.:** On the linking of Jordan continua in  $E_n$  by  $(n-2)$ -cycles. Ann. of Math., II. s. 34, 441—449 (1933).

The well known theorem: "if, in the euclidean plane, two points  $P$  and  $Q$  are separated by a Jordan continuum  $M$ , then  $P$  and  $Q$  are separated by a simple closed curve of  $M$ " is the plane case of the following general theorem: if, in the euclidean  $E_n$ , an  $(n-2)$ -cycle links a Jordan continuum  $M$ , then it links a simple closed curve of  $M$ . In addition, the author extends to  $E_n$  certain theorems of R. L. Moore for the plane which concern the set of all points on simple closed curves of  $M$  that the  $(n-2)$ -cycle links; also, it is shown that given a set of  $r$  cycles  $\Gamma^{n-2}$  of the  $(n-2)$ -basis of  $E_n - M$ , there exists on  $M$  a non-singular linear graph among whose irreducible cycles  $r$  link the  $\Gamma^n$ s.

Nöbeling (Wien).

## Quantentheorie.

**Flint, H. T.:** The uncertainty principle. Nature 132, 282 (1933).

Hinweis auf den bekannten Zusammenhang der Ungenauigkeitsregeln der Quantenmechanik mit dem Begriff der Phasenzelle in der älteren Form der Quantentheorie.

P. Jordan (Rostock).



**Zaycoff, Rascheo:** Zur Erweiterung der Wellenmechanik. Z. Physik 83, 338—340 (1933).

Verf. glaubt, durch Erhöhung der Anzahl der Wellenfunktionen  $\psi_e$  über den Unterschied zwischen positiven und negativen Elektronen Rechenschaft geben zu können.  
V. Fock (Leningrad).

**Einstein, A., und W. Mayer:** Die Diracgleichungen für Semivektoren. Akad. Wetensch. Amsterdam, Proc. 36, 497—516 (1933).

Es wird eine Feldtheorie aufgestellt, in welcher neben den metrischen und elektromagnetischen Feldgrößen zwei (komplexe, vierkomponentige) Semivektoren  $\psi$  und  $\chi$  als neue Feldgrößen auftreten. In der Hamiltonschen Funktion tritt außer dem Krümmungsskalar und dem Skalar des elektromagnetischen Feldes additiv ein in  $\psi$  und  $\chi$  sowie deren ersten Ableitungen quadratischer Skalar auf. Neben den Gravitationsgleichungen und den durch die elektrische Stromdichte vervollständigten Maxwellgleichungen tritt ein System der verallgemeinerten Diracgleichungen für die Semivektoren auf. — Verff. glauben eine Erklärung dafür geben zu können, daß es zwei elektrische Elementarteilchen verschiedener Masse gibt, deren elektrische Ladungen entgegengesetztes Vorzeichen besitzen.  
V. Fock (Leningrad).

**Zaycoff, Rascheo:** Zur Erweiterung der Wellenmechanik. (II. Mitt.) Z. Physik 84, 264—267 (1933).

Es wird die Achtkomponenten-Erweiterung der Diracschen Gleichungen besprochen; die neuen Gleichungen sollen sowohl Elektronen als auch Protonen beschreiben. Aus den 8 Wellenfunktionen werden verschiedene Tensoren gebildet und deren physikalische Bedeutung wird diskutiert. (Vgl. hierzu vorst. Referate Zaycoff, sowie Einstein und Mayer.)  
V. Fock (Leningrad).

**Schouten, J. A.:** Zur generellen Feldtheorie. Semivektoren und Spinraum. (G. F. VII.) Z. Physik 84, 92—111 (1933).

Es wird der Zusammenhang zwischen den von Einstein und Mayer (vgl. vorstehendes Ref.) eingeführten komplexen vierkomponentigen „Semivektoren“ und den zweikomponentigen „Spinoren“ (v. d. Waerden) sowie den vierkomponentigen „Spinvektoren“ (Diracsche  $\psi$ -Funktionen) untersucht.  
V. Fock (Leningrad).

**Darrieus, G.:** Le mouvement des lignes d'induction et les travaux du Pr. S. R. Milner. J. Physique Radium, VII. s. 4, 388—405 (1933).

Im Anschluß an Bateman, Whittaker und Milner werden geometrische und kinematische Eigenschaften der mit dem Sechservektor  $\mathcal{E}, \mathcal{H}$  des elektromagnetischen Feldes assoziierten Linien und Volumelemente untersucht. Ferner werden einige Spekulationen über den Zusammenhang dieser geometrischen Gebilde mit den atomaren Größen (Elektronenladung  $e$  und Wirkungsquantum  $h$ ) gemacht.  
V. Fock (Leningrad).

**Flint, H. T.:** A new presentation and interpretation of the quantum equations. Proc. Roy. Soc. London A 141, 363—375 (1933).

Es wird eine Symbolik vorgeschlagen, mit deren Hilfe die Diracschen Matrizen durch „Einheitsvektoren“ ausgedrückt werden. Einige auf die allgemein-relativistische Formulierung der Diracgleichung bezügliche Formeln werden diskutiert.  
V. Fock.

**Nikolsky, K.:** Note on the Maxwell and Dirac equations. Physik. Z. Sowjetunion 4, 76—79 (1933).

Es wird gezeigt, daß es möglich ist, aus einem Spinor einen (in den Spinorkomponenten quadratischen) Sechservektor so zu bilden, daß beide linearen Differentialgleichungen genügen; und zwar genügt der Spinor der Diracgleichung ohne Massenglied und der Sechservektor den Maxwellgleichungen.

[Nach einer mündlichen Mitteilung des Verf. ist unter der Diracgleichung eigentlich eine Verallgemeinerung derselben zu verstehen, da der Spinor mehr Komponenten hat — nämlich 16 komplexe oder 32 reelle — als die gewöhnliche Diracsche  $\psi$ -Funktion; diese Umstände sind aus dem Text nicht unmittelbar zu ersehen.]  
V. Fock (Leningrad).

**Destouches, Jean-Louis:** Les principes de la mécanique ondulatoire générale et les connexions entre les diverses mécaniques abstraites. C. R. Acad. Sci., Paris 197, 552—554 (1933).

Bemerkungen über ein abstraktes Schema der Mechanik, welches klassische und Quantenmechanik — als Spezialfälle des endlich- und des unendlich-dimensionalen Raumes — in sich enthält. Indem der fragliche Raum zu einem affinen Raum verallgemeinert wird, kann auch die Mechanik der Brownschen Bewegung als Spezialfall umfaßt werden.

*P. Jordan* (Rostock).

**Born, M.:** Modified field equations with a finite radius of the electron. Nature 132, 282 (1933).

I. Verf. zeigt eine einfache Lösungsmöglichkeit für die Aufgabe, im Rahmen der klassischen Maxwell'schen Theorie in relativistisch invarianter Weise einen endlichen Elektronenradius einzuführen, der zu einer endlichen Eigenenergie des Elektrons führt. Er ersetzt nämlich die Lagrangesche Wirkungsfunktion  $L = \frac{1}{2}(\dot{\xi}^2 - \dot{\zeta}^2)$  durch  $L = \frac{1}{a^2} \sqrt{1 + a^2(\dot{\xi}^2 - \dot{\zeta}^2)}$ ; die so in invarianter Weise verallgemeinerten Maxwell'schen Gleichungen besitzen eine statische, kugelsymmetrische Lösung:

$$\dot{\xi} = 0; \quad \dot{\zeta} = -\text{grad } \varphi(r);$$

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{r^2 \frac{d\varphi}{dr}}{\sqrt{1 - \alpha^2 \left( \frac{d\varphi}{dr} \right)^2}} \right) = 0; \quad \varphi = \frac{e}{r_0} \int_0^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{1 + \xi^4}}; \quad r_0^2 = ae.$$

II. Bei der Quantelung des Maxwell'schen Wellenfeldes kann die zunächst unschöne Quadratwurzel im obigen Ausdruck für  $L$  beseitigt werden durch ein Verfahren ähnlich demjenigen, mit welchem Dirac eine Quadratwurzel aus dem Operator  $\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$  gezogen hat.

*P. Jordan* (Rostock).

**Placinteanu, Joan J.:** Zur Theorie des Neutrons. Z. Physik 84, 370—379 (1933).

Der Verf. versucht auf Grund der Hypothese, daß ein Neutron aus einem Proton und einem Elektron in einem Zustand der Energie  $-mc^2$  bestehen soll, eine Wellengleichung für das Neutron aufzustellen, die sich der Dirac'schen Form der Quantenelektrodynamik anschließen soll.

*O. Klein* (Stockholm).

**Solomon, J.:** Remarques sur la théorie du rayonnement. J. Physique Radium, VII. s. 4, 368—387 (1933).

Verf. untersucht die korrespondenzmäßige Anwendbarkeit der Formeln

$$W = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\dot{b}^2}{\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right)^2} + \frac{(b\dot{b})^2}{c^2 \left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right)^3} \right\} dt,$$

$$\mathcal{G} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \int_{t_1}^{t_2} b \left\{ \frac{\dot{b}^2}{\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right)^2} + \frac{(b\dot{b})^2}{c^2 \left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right)^3} \right\} dt$$

für die von einer (insbesondere bei einem Stoß) beschleunigten Ladung  $e$  ausgestrahlte Energie  $W$  und den ausgestrahlten Impuls  $\mathcal{G}$ , und die Begrenzung dieser Anwendbarkeit durch die quantentheoretischen Ungenauigkeitsregeln.

*P. Jordan* (Rostock).

**Teller, E., und K. Weigert:** Die spezifische Wärme des gehemmten eindimensionalen Rotators. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen II, Nr 40, III, Nr 33, 218—231 (1933).

The investigation arises out of recent work of Eucken and Parts [Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1932, 274; Z. Phys. Chem. B 20, 184 (1933)] who conclude from the specific heat curve for ethane that the lowest temperature reached by them ( $180^\circ$  abs.) is still sufficient to put the  $\text{CH}_3$  groups in relative rotation. Its object is to calculate



the contribution to the specific heat of this relative rotation for such temperatures that the value of  $kT$  is comparable with the energy differences involved in the relative displacements of the  $\text{CH}_3$  groups. The specific heat of a one dimensional rotator, with a potential energy periodic in the angle of rotation, is worked out for some particular forms of the energy function. The classical limiting case is first considered, and then various approximations to the quantised system are worked out, and the results shown in figures. The work is then extended to apply to the actual case of ethane and graphs of the specific heat are given for various values of energy of distortion of the molecule.

*W. H. McCrea* (London).

**Kirkwood, John G.:** Quantum statistics of almost classical assemblies. *Physic. Rev.*, II. s. 44, 31—37 (1933).

Durch Anwendung eines nach Potenzen des Wirkungsquantums fortschreitenden Lösungsverfahrens auf eine von Bloch gegebene statistische Differentialgleichung wird eine Rekursionsformel entwickelt, welche die Zustandssumme einer kanonischen Gesamtheit von quantenmechanischen Systemen als eine Summe von Integralen über den Phasenraum darzustellen erlaubt, die im Grenzfall  $\hbar = 0$  in den bekannten Gibbsschen Ausdruck übergeht.

*O. Klein* (Stockholm).

**Gábor, D.:** Elektrostatische Theorie des Plasmas. *Z. Physik* 84, 474—508 (1933).

Die Prozesse in einem „Plasma“ (Lichtbogensubstanz, Sternsubstanz) werden betrachtet. Die elektrostatischen Wechselwirkungen werden berücksichtigt. Da die gewöhnlichen gaskinetischen Methoden dem Fall des Coulombschen Kraftgesetzes nicht angepaßt sind, wird für die mittlere Ionendichte  $w$  im (6-dimensionalen  $x_1, x_2, x_3, v_1, v_2, v_3$ ) Phasenraume eine Differentialgleichung vom Einstein-Fokkerschen Typus aufgestellt:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \text{div} [D \text{ grad } w - (\mu \mathfrak{E} + \mathfrak{b}) w] - \frac{\varepsilon}{m} \text{div}^* [\text{grad}^* F w - (\mathfrak{E} - \mathfrak{G}) w].$$

Die Operatoren im  $v$ -Raume sind durch Sterne kenntlich gemacht;  $D$  und  $F$  sind die Diffusionskoeffizienten im Koordinaten- bzw. Geschwindigkeitsraume,  $\mu$  = Ionenbeweglichkeit,  $\mathfrak{G}$  = Gegenkraft (Bremskraft). Es wird gefordert, daß im stationären Falle die Maxw.-Boltz. Verteilung gilt. Dadurch kann ein Teil der Parameter bestimmt werden. Das Gegenfeld  $\mathfrak{G}$  wird unter Hinzunahme der Debye-Hückelschen Vorstellungen berechnet. Es wird weiter die Relaxationszeit bestimmt und die Ausgleichung der Störungen der Maxwellverteilung untersucht. — Ref. meint, daß Verf. bei der Aufstellung der Einst.-Fokk.-Gleichung außer acht gelassen hat, daß die Koordinatenschwankungen schon durch die Geschwindigkeitsschwankungen bedingt sind. In der Gleichung sind daher einige Glieder zweimal berücksichtigt, und sie ist in der gegebenen Form unrichtig.

*M. Leontowitsch* (Moskau).

**Eckart, Carl:** A comparison of the nuclear theories of Heisenberg and Wigner. *I. Physic. Rev.*, II. s. 44, 109—111 (1933).

Für die Wechselwirkung zwischen Protonen und Neutronen wurde von Heisenberg (vgl. dies. Zbl. 5, 92; 5, 231; 6, 187) eine Austauschkraft, von Wigner (vgl. dies. Zbl. 6, 238) eine gewöhnliche, aus einem Potential ableitbare Kraft angesetzt. Wählt man für die Heisenbergsche Austauschenergie  $-I(r)$  und für die Wignersche potentielle Energie dieselbe Funktion, so zeigt sich, daß der tiefste Zustand in der Wignerschen Gleichung stets tiefer liegt als der tiefste Zustand desselben Systems in der Heisenbergschen Gleichung; nur im Fall des  $\text{H}^2$  liegen beide gleich tief. Übereinstimmung mit dem experimentellen Verhältnis der Massendefekte von He und  $\text{H}^2$  läßt sich trotzdem in beiden Theorien durch jeweils geeignete Wahl der Potentialkurven erreichen. Dagegen dürfte nach der Meinung des Verf. aus der Heisenbergschen Theorie (und zweifellos nur aus ihr) die Instabilität eines Kerns der Masse 3 ( $\text{H}^3$  oder  $\text{He}^3$ ) folgen.

*C. F. v. Weizsäcker* (Kopenhagen).

**Weisskopf, Viktor:** Über die Lebensdauer angeregter Atomzustände. *Physik. Z. Sowjetunion* 4, 97—113 (1933).

Auf Grund der vom selben Verf. früher entwickelten, die Strahlungsdämpfung

berücksichtigenden Dispersionsformel [Ann. Physik 9, 54 (1931); dies. Zbl. 1, 376] wird der genaue Sinn der verschiedenen zur Bestimmung der Lebensdauer eines Atoms in einem stationären Zustand vorgeschlagenen Versuchsanordnungen einer eingehenden Diskussion unterworfen. *O. Klein* (Stockholm).

**Koppenfels, Werner v.: Zur Behandlung des Starkeffektes nach den Methoden der Störungstheorie.** Z. Physik 84, 694—700 (1933).

Die Notiz schließt eine Lücke, die in der Berechnung des Starkeffektes mit Hilfe der Störungstheorie noch bestand. *F. Hund* (Leipzig).

**Lessheim, H., und R. Samuel: Über die Dissoziation zweiatomiger Moleküle mit p-p-Bindung.** Z. Physik 84, 637—656 (1933).

Aus den Potentialkurven der Elektronenterme einiger zweiatomiger Molekeln wird auf die Dissoziationsprodukte und die Elektronenkonfiguration geschlossen. Dabei wird studiert, wie die verschiedenen Elektronen die Bindung beeinflussen. *F. Hund*.

**Honda, Kôtarô, und Tokutarô Hirone: Über die diamagnetische Suszeptibilität des Wasserstoffmoleküls.** Z. Physik 84, 208—211 (1933).

Die thermische Drehung der Wasserstoffmolekel liefert ein magnetisches Moment. Die davon herrührende paramagnetische Suszeptibilität wird so berechnet, als würde bei der Rotation die Elektronenhülle starr mitgeführt. (Daß diese Näherung ein falsches Ergebnis liefert, folgt aus einer neueren Untersuchung von C. G. Wick, dies. Zbl. 7, 88.) *F. Hund* (Leipzig).

## Klassische Optik.

**Natanson, Ladislav: Fermat's principle.** Philos. Mag., VII. s. 16, 178—192 (1933).

Identisch mit der in dies. Zbl. 4, 428 ref. Arbeit. Kritisch wäre noch zu bemerken, daß ein Teil der Ergebnisse in der dem Autor anscheinend unbekannten Arbeit von Sommerfeld und J. Runge, Phys. Ann. 35, 277—298 (1911) schon zu finden ist.

*Herzberger* (Jena).

**Ignatovskij, V.: Beugung am Fernrohrobjektiv und sein Auflösungsvermögen.** Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 6, 729—761 (1933).

Der Verf. geht von der Gleichung für die Lichtintensität in einem Punkte der Einstellenebene eines Fernrohrs aus, die durch eine punktförmige Lichtquelle entsteht. Die Gleichung lautet:

$$Z = C \frac{J_1^2(z)}{z^2}.$$

Hier ist  $C$  eine Konstante,  $J_1$  die Besselsche Funktion erster Ordnung.  $z = \frac{\pi D r}{\lambda b}$ , wo  $D$  der Durchmesser der Austrittspupille ist,  $b$  die Entfernung der Einstellenebene von der Austrittspupille,  $r$  der Abstand des betrachteten Punktes vom geometrischen Bildpunkt. Ignatovskij nimmt nun zunächst eine unendliche Zahl von Lichtpunkten gleichen Abstands, und in einer Reihe liegend, an. Die Verbindungslinie dient als Y-Achse, ferner werden die Koordinaten  $x$  und  $y$  in der Einstellenebene in der gleichen Einheit gemessen wie  $z$ , sind also dimensionslose Größen. Ist der Abstand der Bildpunkte in der gleichen Einheit  $a$ , so kann man die Intensität in einem Punkte  $x, y$  durch eine Summierung erhalten. I. kommt zu dem Ergebnis, daß für  $0 < a \leq \pi$  die Intensität nur von  $x$ , nicht von  $y$  abhängt, d. h. in diesem Falle ist die Helligkeit die nämliche, als ob man eine Lichtlinie hätte. — Sodann wird die Wirkung eines Gitters von unendlich vielen Lichtlinien untersucht (sie werden zur Y-Achse parallel angenommen). Hier ergibt sich, wenn der Abstand wieder  $a$  ist, abgesehen von einer Konstanten, für die Helligkeit  $K(x)$

$$K(x) = \frac{1}{a}, \quad 0 < a \leq \pi,$$

$$K(x) = \frac{1}{a} + \frac{2}{a\pi} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) M(a);$$

wobei  $M(a) = \varphi - \sin \varphi$  und  $\cos \frac{\varphi}{2} = \frac{\pi}{a}$ ; für  $\pi \leq a \leq 2\pi$ ;



für größere Werte von  $a$  erhält man noch etwas andere Werte. — Die Einstellebene ist also für  $a \leq \pi$  gleichmäßig beleuchtet, nur für größere Abstände der Linien findet eine Auflösung statt. Dies bleibt auch so, wenn man statt der Linien leuchtende Streifen annimmt. Haben diese die Breite  $2b$ , während der Abstand entsprechender Stellen  $a$  bleibt (für  $2b = \frac{a}{2}$  sind Streifen und dunkle Zwischenräume gleich breit), so erhält I. für  $0 < a \leq \pi$  die gleichmäßige Helligkeit  $\frac{2b}{a}$ , für  $\pi \leq a \leq 2\pi$  berechnet er den größten und kleinsten Wert  $I_{\max}$  und  $I_{\min}$  (Mitte der Streifen, Mitte der Zwischenräume):

$$I_{\max} = \frac{2b}{a} + \frac{2}{\pi^2} \sin\left(\frac{2\pi b}{a}\right) M(a) \quad \text{und} \quad I_{\min} = \frac{2b}{a} - \frac{2}{\pi^2} \sin\left(\frac{2\pi b}{a}\right) M(a),$$

für die Deutlichkeit der Auflösung ist  $\eta = \frac{I_{\min}}{I_{\max}}$  maßgebend. Für Lichtlinien sowie für  $2b = \frac{a}{2}$  gibt I. Tafeln für die Abhängigkeit der Größe  $\eta$  von  $a$ . — Dem Abstände  $a$  entspricht dingsseitig der Winkel

$$\beta = \frac{a\lambda}{\pi D}.$$

Wäre das Auge unendlich empfindlich, so wäre die Grenze des Auflösungsvermögens durch  $a = \pi$  bestimmt, also durch  $\beta_0 = \frac{\lambda}{D}$ . Tatsächlich muß aber  $\eta$  um einen gewissen Betrag von 1 abweichen, dieser ist durch Versuche zu ermitteln, und dann können die angegebenen Tafeln ein Maß für das Auflösungsvermögen geben. *H. Boegehold* (Jena).

**Klimmeck, Artur:** Die Größenbestimmung von Ultramikronen mit dem Interferenzmikroskop. *Z. Physik* 85, 68—84 (1933).

Das Auflösungsvermögen eines Mikroskops ist bekanntlich  $\lambda/2a$ , wo  $\lambda$  die Wellenlänge des benutzten Lichtes und  $a$  die Apertur des Mikroskopobjektivs ist. Um es zu steigern, benutzt man Interferenzerscheinungen. Wird das Mikroskopobjektiv bis auf zwei diametral gegenüberliegende kleine Öffnungen abgeblendet, so erzeugt jeder leuchtende Objektpunkt in der Bildebene ein Interferenzstreifensystem, dessen Streifenabstand vom Abstand  $e$  der beiden Öffnungen abhängt. Sind zwei Objektpunkte vorhanden oder leuchten nur zwei einander gegenüberliegende Punkte des Randes eines ultramikroskopischen Objektes (Azimutblende zwischen Beleuchtungskondensor und Objekt), so entstehen zwei sich überlagernde Interferenzstreifensysteme gleichen Streifenabstandes, die aber gegeneinander um einen Betrag verschoben sind, der von dem gegenseitigen Abstand der beiden leuchtenden Punkte abhängt. Durch Ändern von  $e$  läßt sich erreichen, daß der halbe Streifenabstand gerade gleich der Verschiebung der beiden Streifensysteme ist, sich diese also gegenseitig auslöschen. Dies gibt eine Möglichkeit zur Abstandsbestimmung der beiden Punkte und erhöht das Auflösungsvermögen des Mikroskops auf  $\lambda/4a$ . Noch weiter kommt man, wenn man nicht auf Auslöschung einstellt, sondern die Sichtbarkeit der Interferenzen auswertet (photometrisch). Der Verf. zeigt nun zunächst theoretisch, daß sich bei einem selbstleuchtenden Objekt die Intensitätsverteilung in der Bildebene darstellen läßt durch

$$I = P + Q \cos j,$$

die eines nichtselbstleuchtenden Objektes dagegen durch

$$I = (Q' \cos j')^2,$$

wo  $P, Q, Q'$  konstant sind und  $j$  bzw.  $j'$  außer vom Spaltabstand, von der Wellenlänge usw. noch von der Lage des Aufpunktes im Bilde abhängt. Im ersten Fall überlagern sich also einer konstanten Intensität Interferenzstreifen, im zweiten Fall ist ein reines Streifensystem vorhanden. Die erhaltenen Formeln werden auf ein Objekt mit kreiszonaler Ausstrahlung  $I = I^*(R^2 - r^2)^n$  angewandt. Die experimentellen Ergebnisse ließen sich theoretisch deuten, wenn hier  $n = -1$  gesetzt wird und die Ausstrahlung



als inkohärent angenommen wird. Es ergibt sich dann für die Sichtbarkeit  $V$  der Interferenzen der Ausdruck

$$V = (1 - i)/(1 + i) = I_0(4\pi a R/\lambda) \text{ mit } i = I_{\min}/I_{\max},$$

wo  $I_0$  die Besselsche Funktion nullter Ordnung ist. Ist  $z$  das Argument, für das  $I_0(z) = V$  wird, so ergibt sich der Durchmesser des (kugelförmigen) ultramikroskopischen Objektes zu  $2R = z\lambda/2\pi a$ . Zum Schluß werden experimentelle Fehlermöglichkeiten und theoretische Vernachlässigungen kurz diskutiert. Das Auflösungsvermögen des Interferenzmikroskopes ist bei Zugrundelegung der Sichtbarkeit und Voraussetzung kugelförmiger Teilchen theoretisch unbegrenzt. *Picht* (Berlin).

**Kingslake, R., and A. B. Simmons: A method of projecting star images having coma and astigmatism.** J. Opt. Soc. Amer. 23, 282–288 (1933).

Beschränkt man sich bei der theoretischen Behandlung der optischen Abbildung auf die Aberrationen dritter Ordnung, so gelten bekanntlich für die Koordinaten der Abweichung der Lage des wirklichen Bildpunktes von der ideellen, fehlerfreien Lage die Gleichungen

$$x' = -As^3 \sin \theta - Bs^2 h \sin 2\theta - Cs h^2 \sin \theta - Ds h^2 \sin \theta,$$

$$y' = -As^3 \cos \theta - Bs^2 h(2 + \cos 2\theta) - 3Cs h^2 \cos \theta - Ds h^2 \cos \theta - Eh^3,$$

in denen  $s$  und  $\theta$  Polarkoordinaten in der Ebene der Austrittspupille des betrachteten optischen Systems um den Achsenschnittpunkt als Nullpunkt sind.  $h$  ist der Abstand des betrachteten außeraxialen Punktes von der Achse,  $A, B, C, D, E$  sind die Seidelschen Aberrationskoeffizienten (sphärische Aberration, Koma, Astigmatismus, Bildfeldwölbung, Verzeichnung). Die Verf. leiten diese Gleichungen noch einmal ab und diskutieren sie zunächst in der üblichen Weise, daß sie alle Koeffizienten bis auf (jeweils) einen gleich Null setzen. Setzt man hier  $s = \text{const}$ ,  $\theta$  variabel, so erhält man die Kurve, in der die Bildebene von den Strahlen eines Strahlenkegels einer bestimmten durch  $s$  gegebenen Zone geschnitten wird, für die einzelnen Seidelschen Aberrationen. Die Verf. erweitern dann diese bekannten Untersuchungen, indem sie zwei Aberrationskoeffizienten (speziell die Koeffizienten  $B$  und  $C$  der Koma und des Astigmatismus) von Null verschieden und in bestimmtem Verhältnis stehend annehmen. Eine zweite Erweiterung besteht darin, daß sie nicht nur den Schnitt des zu einer bestimmten Zone ( $s = \text{const}$ ) gehörenden Strahlenkegels mit der Bildebene, sondern auch mit verschiedenen zur Bildebene parallelen achsensenkrechten Ebenen untersuchen. Für diese zweite Erweiterung benutzen sie ein einfaches graphisches Verfahren. In einer großen Zahl von Zeichnungen stellen sie die hierbei erhaltenen Ergebnisse dar, und zwar für reine Koma ( $C = 0$ ), für  $B:C = 3:1$ , für  $B:C = 2:2$ , für  $B:C = 1:3$  und für reinen Astigmatismus ( $B = 0$ ), jeden dieser Fälle für 6 verschiedene achsensenkrechte Ebenen. Sie geben dann eine apparative Vorrichtung an, mit der sie die theoretisch erhaltenen Ergebnisse experimentell einwandfrei verifizieren können. Die Apparatur besteht im wesentlichen aus einer punktförmigen Lichtquelle, einem schief zu stellenden Aplanat und einer zwischengeschalteten negativen Zylinderlinse, um den Astigmatismus des Aplanaten ganz oder zum Teil ausschalten zu können. *Picht*.

**Cavinato, Antonio: L'uso del prisma per la determinazione degli indici principali di rifrazione nei cristalli.** Accad. naz. Lincei, Mem., VI. s. 5, 73–101 (1933).

Daß man zur Messung der Brechzahlen eines isotropen Mittels aus diesem ein Prisma schleift, dieses von einem Lichtstrahl im Minimum der Ablenkung durchsetzen läßt und aus dem Ablenkungswinkel die Brechzahl bestimmt, ist bekannt. A. Cavinato benutzt eine Abänderung dieses Verfahrens zur Bestimmung der Hauptbrechzahlen ein- und zweiachsiger Kristalle von bekannter und unbekannter Achsenlage. Die im theoretischen Teil sehr ausführliche und leistungswerte Arbeit gibt auch ein praktisches Mittel an, um zu vermeiden, daß bei symmetrischem Durchgang an der zweiten Prismenfläche Totalreflexion eintritt. (Einbettung des Kristallprismas in zwei Prismen nahezu gleiche Brechzahl.)

*Herzberger* (Jena).



**Boutaric, Augustin, et Jean Bouchard: Remarques sur la fluorescence des solutions et des gaz.** J. Physique Radium, VII. s. 4, 324–332 (1933).

Es wird angenommen, daß die Abhängigkeit:  $\Phi = \Phi_0 e^{-Kc}$  ( $\Phi$  = Fluoreszenz-ausbeute der gelösten Substanz pro Masseneinheit,  $c$  = Konzentration) für alle  $c$  gültig ist. Die Absorption des einfallenden und Fluoreszenzlichtes in der Küvette wird rechnerisch berücksichtigt. Die Verff. meinen, daß die von S. I. Wawilow [Z. Phys. 31, 750 (1925)], S. Vitte [J. Chimie Physique 26, 276 (1929)], G. Lepine [Ann. Physique 4, 207 (1915)], beobachteten Abweichungen von diesem Gesetz für kleine Konzentrationen dadurch (allerdings qualitativ) erklärt werden können. *M. Leontowitsch.*

**Evans, R. C.: An experiment on dispersion.** Proc. Cambridge Philos. Soc. 29, 417–422 (1933).

Beschreibung und ausführliche mathematische Begründung einer Methode zur Bestimmung der Dispersion des Glasmaterials (eines Prismas) aus kombinierter Anwendung von Prisma und Gitter. Läßt man Licht verschiedener Wellenlänge (Linien-spektrum) durch ein Gitter fallen und darauf durch ein Prisma, dessen Dispersion man bestimmen will, und liegt die Eintrittsfläche des Prismas annähernd senkrecht zur Gitterebene, so gibt es — unter geeigneten Bedingungen — für jede Austrittsrichtung zwei verschiedene Wellenlängen. Es gilt die Formel

$$\frac{n_1 - n_2}{q_1 - q_2} = - \frac{q_1 + q_2 - 2 \sin \theta}{n_0 \left\{ 2 \sin^2 \alpha - \frac{\sin 2\alpha \sin \Phi}{\varrho_0} \right\}},$$

worin  $n_1, n_2$  der Brechungsindex für die beiden nach dem Durchgang durch das Prisma zusammenfallenden Wellenlängen  $\lambda_1, \lambda_2$ ,  $n_0$  ein mittlerer Brechungsindex,  $q_1 = m\lambda_1/d$ ,  $q_2 = m\lambda_2/d$ ,  $d$  die Gitterkonstante,  $m$  die benutzte Ordnung des Gitterspektrums,  $\alpha$  der Prismenwinkel,  $\theta$  der Winkel des einfallenden Lichtes zur Gitternormalen,  $\Phi$  der Winkel des aus dem Prisma austretenden Lichtes ( $\lambda_1$  und  $\lambda_2$ ) zur Normalen der letzten Prismenfläche,  $\varrho_0^2 = n_0^2 - \sin^2 \Phi$ . Man benutzt die erste Ordnung des Gitterspektrums und dreht Gitter + Prisma als Ganzes, bis die benutzten Spektrallinien zusammenfallen. Man bestimmt die hierfür gültigen Werte von  $\theta$  und  $\Phi$  und berechnet aus der angegebenen Formel  $n_1 - n_2$ . Die Genauigkeit betrug etwa 0,25%. *Picht (Berlin).*

**Eckart, Carl: A general derivation of the formula for the diffraction by a perfect grating.** Physic. Rev., II. s. 44, 12–14 (1933).

Als „vollständiges“ Gitter wird ein Gitter bezeichnet, bei dem die Gitterfurchen sich in einem Material befinden, das keine atomaren Eigenschaften besitzt und dessen optische Eigenschaften vollständig durch einen evtl. komplexen Brechungsindex bestimmt sind. Ferner wird vorausgesetzt, daß sich die Furchen in einer vollkommen ebenen Fläche befinden und daß sie streng parallel, identisch und gleichabständig sind. Ferner soll das Gitter unendlich ausgedehnt sein und die Einfall- und Brechungsebenen des Lichtes senkrecht zu den Gitterfurchen liegen, so daß das Problem als zweidimensionales behandelt werden kann. Trotz dieser durch den Begriff des „vollständigen“ Gitters gegebener weitgehender Vereinfachungen ist die gegebene Ableitung doch „allgemeiner“ als die elementare Ableitung, da der Einfluß der Mehrfachstreuung, die Brechung des Lichtes bei durchsichtigem Gittermaterial u. a. berücksichtigt wird. Die Arbeit zeigt, daß die genannten Faktoren auf die Bestimmung der Wellenlänge des Lichtes (aus den Gittermessungen) keinen Einfluß haben. *Picht (Berlin).*

## Kristallographie.

**Delaunay, B.: Sur la généralisation de la théorie des paralléloèdres.** Bull. Acad. Sci. URSS, VII. s. Nr 5, 641–645 (1933).

Beweis folgenden Satzes: Wenn man den dreidimensionalen Raum lückenlos in konvexe Körper einteilt, welche ähnlich und parallel orientiert sind und weder unendlich groß noch unendlich klein sein sollen, so können die Körper nur Fedorowsche Paralleloeder sein. *F. Laves (Göttingen).*



Haag, F.: Die Grundgleichungen für Ebenen- und Raumteilung. Z. Kristallogr. A 86, 153—155 (1933).

Beweis der an sich schon bekannten Bedingungen, denen jede lückenlose Ebenen- bzw. Raumteilung genügen muß:  $E + F = K$  bzw.  $E + F = K + P(E, K, F, P$  = Anzahl der Ecken, Kanten, Flächen, Polyeder). Dazu einige Beispiele. *Laves*.

Engelhardt, Heinrich: Über die Zerlegung der euklidischen Ebene und des euklidischen Raums in kongruente Bereiche. Greifswald: Diss. 1933. 38 S.

Definition 1. Ein räumlicher Bereich sei ein Gebiet des euklidischen Raums mit folgenden Eigenschaften: 1. Das Gebiet ist vom Typus einer Kugel mit endlich vielen gewöhnlichen Henkeln. 2a) Der Rand des Gebietes setzt sich aus endlich vielen Flächen zusammen, die entstehen, wenn man sich die Oberfläche der unter 1. genannten Kugel mit Henkeln durch Kreisbögen oder geschlossene Kreise in endlich viele ein- oder mehrfach zusammenhängende zweidimensionale Gebiete zerlegt denkt, wobei kein Kreisbogenstück dem Rande von nur einem Gebiet angehört. 2b) Jede dieser Flächen kann durch drei mindestens zweimal stetig differenzierbare Funktionen  $x(s, t)$ ,  $y(s, t)$ ,  $z(s, t)$  dargestellt werden, deren aus den ersten Ableitungen gebildete Funktionalmatrix durchweg vom Range zwei ist. 3. Zwei verschiedene Randflächen besitzen in gemeinsamen Punkten verschiedene Tangentialebenen. 4. Von den endlich vielen Randbögen, die jede Fläche nach 1. und 2a) mit den angrenzenden von ihr verschiedenen Flächen gemeinsam hat, kann jeder durch drei mindestens einmal stetig differenzierbare Funktionen  $x(s)$ ,  $y(s)$ ,  $z(s)$  dargestellt werden, deren erste Ableitungen niemals gleichzeitig verschwinden. 5. Zwei verschiedene Randbögen derselben Fläche besitzen in gemeinsamen Punkten verschiedene Halbtangenten. Definition 2: Ein Bereich, der die Eigenschaft hat, daß der euklidische Raum in zu ihm kongruente Exemplare zerlegt werden kann, heiße Zerlegungsbereich. Es wird dann bewiesen, daß jeder Zerlegungsbereich einem Zerlegungspolyeder oder einem Zerlegungs-Schraubenflächenpolyeder äquivalent ist, wobei Bedingungen angegeben werden, welche eine Entscheidung über Vorliegen des einen oder anderen Falles zulassen. *F. Laves*.

Nowacki, Werner: Die nichtkristallographischen Punktgruppen. Z. Kristallogr. A 86, 19—31 (1933).

Die Arbeit will keine neuen Ergebnisse bringen, sondern lediglich eine für die Kristallographie praktische Zusammenstellung, die insbesondere für eine Übersicht über mögliche Molekül-Anordnungen und Symmetrien dienen kann. Die Symmetrieverhältnisse (Untergruppen usw.) sind explizite in der kristallographisch üblichen Form dargestellt. Weiterhin sind alle möglichen Punktkomplexe der krist. und nichtkrist. Punktgruppen mit Angabe der Symmetriebedingung und Zähligkeiten sowie der Koordinaten, letzteres leider nur für die zu krist. Punktgruppen gehörigen Punkte, zusammengestellt. *Laves* (Göttingen).

Lewis, Frederic T.: The significance of cells as revealed by their polyhedral shapes, with special reference to precartilage, and a surmise concerning nervecells and neuroglia. Proc. Amer. Acad. Arts Sci. 68, 251—284 (1933).

Behandelt wird das Problem der durchschnittlichen Flächenanzahl organischer Zellen. Verf. kommt auf Grund mechanischer Überlegungen zu dem Schluß, daß in einer Kante im allgemeinen immer nur drei Zellen und in einer Ecke immer nur vier Zellen zusammenstoßen werden, d. h. daß in einer Ecke einer Zelle immer nur drei Flächen derselben Zelle zusammenstoßen. Verf. spricht die Vermutung aus, daß die Zellpolyeder, welche die wahllos verteilten Zellkerne umschließen und gegeneinander abgrenzen, durchschnittlich 14 Flächen haben werden. Ein Beweis wird nicht gegeben. Die Vermutung wird als allgemeingültig wahrscheinlich gemacht durch folgende drei Punkte: 1. Durch die Tatsache, daß sich der Raum lückenlos in konvexe, parallel orientierte und den obigen Bedingungen genügende 14-Flächner aufteilen läßt. 2. Durch Auszählen von 250 natürlichen Zellen. 3. Durch konstruktiv statistische Überlegungen. Schöne Abbildungen illustrieren das reizvolle Problem. *F. Laves*.